

فهرست مطالب

۳	۱ سخن آغازین
۴	۱.۱ پیشگفتار
۷	۲ فصل صفر
۷	۱.۰.۲ مقدمات و پیشنیازهای جبری
۱۳	۳ الزامات طرح مسئله
۱۴	۱.۰.۳ توضیحات و الزامات جبری
۲۳	۴ قضایای مقدماتی و مهم در اثبات مسئله
۲۳	۱.۰.۴ قضایای ذکر شده و مهم
۳۱	۵ بحث اساسی مقاله و اثبات قضیه اصلی
۳۱	۱.۰.۵ حلقه های با ایده آل های غیر ماکسیمال متناهی تولید شده
۴۱	۶ نمایه
۴۱	۱.۰.۶ معرفی نمادگذاریها
۴۳	۷ فهرست منابع و مآخذ

فصل ۱

سخن آغازین

به نام خداوندگار حکیم، هنرمند چیره خدای رحیم

با نام و یاد خداوندگار شروع میکنیم. خدایی که از همه برتر و بالاتر است. خداوندگاری که تشبیه آن جز به نور میسر نیست. خداوندگاری که قسم خورده بر قلم است، و چه سخت است بر قلمی که امانت دار لطف و محبت الهی نباشد. پروردگار سترگ بلند مرتبه را هزاران هزاران بار سپاس که توفیق از جانب پر مهر خویش عنایت فرمود تا این بار این بنده کمترین سعادت در دست گرفتن قلم علم را داشته باشم از آن جهت که شاید بتوانم ذره ای از الطاف بی حد و اندازه حضرت دوست را در حق خویش برآورده سازم و جبران نمایم. خدای را سپاس که عنایت مرحمت فرمود تا سعادت داشته باشم و از سفره ی بی کران و پر از رحمت و نعمت و آگاهی دانش الهی ذره ای را بر حسب توان خود بردارم و به لطف او این نهال نحیف و خردسال دانش را پربارتر و استوارتر بسازم. الحق که سخن از حضرت دوست گفتن در هیچ مغالی از حد بحث بشریت نگنجیده و به اندازه شایستگی او نبوده است. لذا اکتفا کننده این حدیث زیبایم که خداوند میداند کس توان ادا کردن حق نعمات او را ندارد

مجلس تمام گشت و به آخر رسید عمر، ما همچنان در اول وصف تو مانده ایم.

دانیال جوادی، آذر ۹۷

۱.۱ پیشگفتار

پیشگفتار

قصد ما در این مقاله اینست تا مفهومی مهم را در نظریه ی حلقه های جابجایی بیان کنیم که در آن می‌خواهیم به بیان مطالبی مهم و اساسی پیرامون این موضوع نیز توجه کنیم. قصد و هدف ما در این مقاله اینست که ارتباط میان دو مفهوم اساسی در نظریه جبر جابجایی را بیان کنیم. این دو مفهوم عبارتند از: ایده آل های غیر ماکسیمال یک حلقه و متناهی تولید شده بودن آنها. برای بیان این دو مفهوم لازم است ابتدا تعاریف و قرارداد های لازم را برای پیشبرد مطالب بیان کنیم. لذا در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مهم و نتایج کاربردی آنها خواهیم پرداخت. در نظریه حلقه های جابجایی قضیه به نام قضیه کوهن موجود است که این قضیه بیان میکند در یک حلقه جابجایی اگر تمام ایده آل های اول آن حلقه متناهی تولید شده باشند آنگاه هر ایده ظال دیگر این حلقه هم متناهی تولید شده است. اما در این مسئله میتوان چنین استنباط کرد که اگر ایده آل های ماکسیمال این حلقه متناهی تولید شده موجود باشند آنگاه نمیتوان گفت ک هدیگر اید آل های این حلقه هم متناهی تولید شده موجود هستند. در این مقاله هدف ما اینست که این مطلب را بررسی کنیم که اگر تمام ایده آل های غیر ماکسیمال یک حلقه متناهی تولید شده باشند آیا دیگر ایده آل های این حلقه هم متناهی تولید شده هستند یا خیر؟

جواب مثبت است و تمام تلاش ما در این مقاله مبنی بر اثبات چگونگی این قضیه مهم و نیز بحث و بررسی بیستر برای درک مطالب لازم این مقاله و نیز اصل مقاله است.

چکیده مطالب

- ۱- الزامات و توضیحات لازم برای مطرح کردن بحث اصلی مقاله
- ۲- تشریح و حل مثال هایی از جهت بیشتر آشنا شدن با مبحث اصلی مقاله
- ۳- طرح موضوع اصلی و قالب بندی سوال و پاسخ مسئله مقاله
- ۴- ذکر مثال ها و دیگر نتایج استخراج شده از بحث اصلی مقاله
- ۵- پایان مقاله و تشریح نتایج اصلی در قالب اصلی پایان نامه و طرح یک زمینه علمی از بحث
- ۶- اتمام پایان نامه

فصل ۲

فصل صفر

۱۰۰۲ مقدمات و پیشنیازهای جبری

در این فصل بنا داریم تا مطالبی را جهت آشنایی هر چه بیشتر با محیط این مقاله ارائه دهیم که در آن به بحث و ارائه مطالبی مربوط به اصول و مبانی جبر خواهیم پرداخت. بخشی از مطالب نزدیکتر از مطالب این فصل نسبت به مطالب عمده گفته شده در این مقاله را در فصل بعدی ارائه کرده ایم فلذا هدف ما از ارائه این فصل آنست که الزامات جبری مورد نیاز برای تشریح و توضیح بیشتر مطلب اصلی مقاله مورد توجه اکید قرار گرفته و نیز در راستای اثبات و بررسی این قضیه و نیز دیگر قضایای مورد بحث در این مقاله بیشتر به مطالبی بپردازیم که از لحاظ جنبه تحلیلی و بررسی از نظر شاخه علمی این مقاله بیشتر دارای وجه اهمیت هستند. لذا در این فصل بنا داریم تا تعاریف و مطالب ابتدایی و در عین حال بسیار مهم را در زمینه جبر ارائه کنیم و به بحث و بررسی در راستای مطالب آن بپردازیم تا دیگر جنبه های مورد نیاز درباره این بحث بیشتر روشن شود.

تعریف: تابع $A \rightarrow A \times A$: $*$ را یک عمل دو تایی روی مجموعه غیر تهی A مینامیم عمل جمع روی اعداد طبیعی، عمل ضرب روی اعداد حقیقی و همنهشتی به پیمانه یک عدد صحیح برای ضرب کلاسهای هم نهشتی، جمع روی اعداد حقیقی و... مثالهایی از انواع مختلف عملهای دو تایی هستند که بر مجموعه های عددی شناخته شده تعریف شده اند. اصل مطلب در باب عملهای دو تایی در حقیقت تعریف یک تابع برای تشکیل یک ساختار جبری با ارزش است که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت.

تعریف: اگر G یک مجموعه غیر تهی و $*$ یک عمل دو تایی بر G باشد آنگاه گوئیم که $(G, *)$ یک نیم گروه است هرگاه $*$ روی مجموعه G خاصیت شرکت پذیری را داشته باشد. به این معنا که برای هر g, h, k در این مجموعه داشته باشیم: $g * (h * k) = (g * h) * k$.

به عنوان مثال $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم گروه است چرا که بر حسب تعریف جمع روی اعداد طبیعی شرکت پذیر است.

تعریف: نیم گروه $(G, *)$ را یک تکوار یا مونوئید گوئیم هرگاه یک عنصر خنثی مثل e در G چنان موجود باشد که برای هر g در G داشته باشیم: $g * e = e * g$.

به عنوان مثال $(\mathbb{N}, \cdot)$ یک تکوار است. چون علاوه بر خاصیت شرکت پذیری ضرب معمولی روی اعداد طبیعی عدد ۱ نیز عنصر خنثی این عمل دو تایی است.

تعریف: تکوار $(G, *)$ را یک گروه مینامیم هرگاه هر عنصر مثل g در G دارای

وارون نسبت به عمل $*$ باشد. به عبارت دیگر داشته باشیم: $g * x = x * g = e$.
در اغلب اوقات وارون این عنصر را با نماد g^{-1} نشان میدهیم.

برای مثال $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه است. چرا که عضو همانی یا خنثی آن صفر است و وارون هر عضو نسبت به این عمل قرینه آن است.

برای مثال $(\mathbb{N}, +)$ گروه نیست چرا که نه تنها هیچ عنصری در آن داری وارون نسبت به این عمل نیست بلکه حتی قبل تر از این مسئله آنست که این مجموعه دارای عنصر همانی جمعی یعنی صفر نیست.

برای مثال $(\mathbb{R}, \cdot)$ نیز یک گروه نیست. چرا که در یک گروه میدانیم باید تمام عناصر دارای وارون باشند ولی در اینجا و بر اساس این عمل دوتایی تعریف شده عنصر صفر نمیتواند دارای وارون ضربی باشد.

برای مثال $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه است. چرا که بر حسب تعریف خاصیت یک گروه دارای عنصر خنثی نسبت به عمل جمع است و علاوه بر آن وارون هر عنصر نیز در این مجموعه وجود دارد.

برای مثال $(\mathbb{R} - \{0\}, *)$ با تعریف عمل دوتایی که برای هر a و b در این مجموعه داشته باشیم: $a * b = 2a.b$

تعریف: گروه $(G, *)$ را یک گروه آبدلی گوییم هرگاه برای هر دو عنصر مثل a و b در G داشته باشیم: $a * b = b * a$

برای مثال از گروه های آبدلی میتوان $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{R}, +)$ و ... را نام برد.

حال در اینجا قصد داریم تا به بیان برخی قضایای اساسی از مطالب نظریه گروه ها بپردازیم که در اینجا تنها به آنها اشاره کرده و اثبات آنها را انجام نمیدهیم. اثبات این قضایا بسیار ساده و از راه تعریف مطالبی که به آنها اشاره شد براحتی میسر است. این قضایا و نکات که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت در اصل برای روشن تر شدن اساسی ترین ویژگیهای این ساختار جبری و نیز استفاده از آنها برای تکمیل کردن مطالب بعدی است.

قضیه ۱: اگر $(G, *)$ یک گروه باشد آنگاه عنصر همانی منحصر بفرد است.

قضیه ۲: اگر $(G, *)$ یک گروه باشد آنگاه وارون هر عنصر در آن گروه هم منحصر بفرد است.

قضیه ۳: اگر $(G, *)$ یک گروه باشد آنگاه قوانین حذف در این گروه باید برقرار باشد به این معنا که باشیم:

$$y = z \text{ آنگاه: } x * y = x * z \text{ (قانون حذف از چپ)}$$

$$y = z \text{ آنگاه: } y * x = z * x \text{ (قانون حذف از راست)}$$

فصل ٣

الزامات طرح مسئله

۱۰۰۳ توضیحات و الزامات جبری

تعاریف و تذکرات

قصد و هدف ما در این مقاله اینست که ارتباط میان دو مفهوم اساسی در نظریه جبر جابجایی را بیان کنیم. این دو مفهوم عبارتند از: ایده آل های غیر ماکسیمال یک حلقه و متناهی تولید شده بودن آنها. برای بیان این دو مفهوم لازم است ابتدا تعاریف و قرارداد های لازم را برای پیشبرد مطالب بیان کنیم. لذا در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مهم و نتایج کاربردی آنها خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۱ یک مجموعه به همراه دو عمل دوتایی باشد. $(R, +, \cdot)$ را یک حلقه گوییم هرگاه R نسبت به جمع یک گروه ابدی و نیز نسبت به ضرب شرکت پذیر و توزیع پذیر باشد. به عبارت دیگر:

$$1-(R, +) \text{ یک گروه ابدی باشد}$$

$$2-a(b+c) = (b+c)a = ba+ca \text{ برای هر } a, b, c \text{ در } R$$

$$3-\forall a, b, c \in R; a.(b+c) = a.b + a.c$$

به عنوان مثال $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و ... مثالهایی از انواع مختلف حلقه ها هستند. در این مقاله قصد داریم تا مطالبی را که در ارتباط با این موضوع هستند را به اختصار یا احیاناً به تفصیل بیان کرده و به کمک آنها بتوانیم مطالب اصلی را هم استفاده و اثبات کنیم. حال قصد داریم تا تمام تعاریف لازم را بیان کنیم. لازم به ذکر است که تمام تعاریف گفته شده در جهت هر چه بیشتر آشنا شدن با مقاله و نیز سهولت در بسط و تشریح مطالب و مسائل به کار میرود.

تعریف ۱.۱.۲: حلقه R را یکدار گوییم و یک این حلقه را با نماد 1_R نشان میدهم. منظور ما از یک حلقه یکدار آنست که داشته باشیم: $1_R \cdot r = r \cdot 1_R = r$ (برای هر r در R)

تعریف ۱.۱.۳: حلقه تقسیم R که را یک حلقه با این تعریف میدانیم برای هر a, b در این حلقه

$$1_R \neq 0, a.b = 1_R$$

تعریف ۱.۱.۴: یک حوزه صحیح را یک حلقه تقسیم غیر صفر و آبدلی میدانیم

تعریف ۱.۱.۵: یک زیر حلقه از حلقه R را یک مجموعه مثل S مینامیم به طوریکه داشته باشیم $S \subseteq R$ و نیز خود S یک حلقه باشد.

تعریف ۱.۱.۶: یک ایده آل مثل I را یک ایده آل چپ گوئیم هرگاه یک زیر حلقه از این حلقه بوده به علاوه آنکه شرایط زیر نیز باید برقرار باشند:
۱- $I \neq \emptyset$.

۲- برای هر a, b در I داشته باشیم: $a - b \in I$.

۳- برای هر a در I و هر b در R داشته باشیم: $ra \in I$.

تعریف ۱.۱.۷: یک ایده آل دو طرفه را یک ایده آل چپ و راست حلقه تعریف میکنیم و در حالت کلی یک ایده آل را با نماد $I \subseteq R$ نشان میدهیم.

تعریف ۱.۱.۸: یک ایده آل اول حلقه را با نماد p نشان داده و تعریف میکنیم

که اگر برای a, b در حلقه R داشته باشیم $ab \in p$ آنگاه یا a در p یا اینکه b در p .

تعریف ۱.۱.۹. فرض کنید R یک حلقه و $m \subsetneq R$ گوئیم m یک ایده آل ماکسیمال است هرگاه تنها ایده آل های شامل m یا خود R باشند یا m

تعریف ۱.۱.۱۰. R یک حلقه باشد و I یک ایده آل از این حلقه باشد آنگاه یک حلقه خارج قسمتی را تعریف میکنیم:

$$R/I = \{x + I \mid x \in R\}$$

$$(x + I) + (y + I) = x + y + I \quad ۱-$$

$$(x + I).(y + I) = x.y + I \quad ۲-$$

تعریف ۱.۱.۱۱. گوئیم حلقه R یک حلقه ساده است اگر چنانچه: $R, 0 \subsetneq R$

تعریف ۱.۱.۱۲. اگر I یک ایده آل باشد رادیکال یک ایده آل را تعریف میکنیم در برای یک n ای در $\mathbb{N}$ داشته باشیم که $x^n \in I$

تعریف ۱.۱.۱۳. رادیکال ایده آل یک ایده آل را تعریف میکنیم: $\sqrt{I} = I$.

تعریف ۱.۱.۱۴. یک ایده آل غیر رادیکال را تعریف میکنیم: $I \subsetneq \sqrt{I}$

تعریف ۱.۱.۱۵ فرض کنید R یک حلقه و S یک زیر مجموعه از R باشد آنگاه اشتراک تمام ایده آل هایی که شامل S هستند را ایده آل تولید شده توسط S مینامیم و با نماد $(S)_r$ نشان میدهیم.

تعریف ۱.۱.۱۶ ایده آل (های) حقیقی یک حلقه را ایده آل (های) غیر بدیهی این حلقه مینامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷ گوییم ایده آل های I_j, I_i نسبت به هم اول هستند هرگاه $I_j + I_i = R$.

تعریف ۱.۱.۱۸ فرض کنید که R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. رادیکال جیکوبسون این حلقه را اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال این حلقه تعریف میکنیم و با $\text{Rad}(R)$ یا $\mathbb{J}(\mathbb{R})$ نشان میدهیم. $(\bigcap \mathfrak{m}_i = \mathbb{J}(\mathbb{R}))$

تعریف ۱.۱.۱۹ یک رشته دقیق را یک زنجیره از R هم ریختی هایی تعریف میکنیم که $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ همگی R مدول هستند. این رشته را با این شکل نشان داده و تعریف میکنیم: $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_4} \dots M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$
 $\text{Im}f_i = \text{Ker}f_{i+1}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

تعریف ۱.۱.۲۰ گوییم تابع $f : A \rightarrow B$ یک نگاشت طبیعی است هرگاه f بدیهی ترین تابع میان این دو مجموعه باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱ بعد کرول یک حلقه را با نماد $\dim(R)$ نشان داده و تعریف میکنیم: طول سوپریموم زنجیره شمول ایده آل های اول این حلقه. به عبارت دیگر اگر چنانچه $p_1, p_2, \dots, p_n$ ایده آل های اول حلقه R باشند آنگاه باید داشته باشیم: $p_1 \subsetneq p_2 \subsetneq p_3 \dots \subsetneq p_n$.

تعریف ۱.۱.۲۲ فرض کنید که R یک حلقه باشد و M یک مجموعه ناتهی است. M را یک R -مدول چپ مینامیم هرگاه:

$$M \times M \rightarrow M: + - ۱$$

$$R \times M \rightarrow M: . - ۲$$

$$(M, +) - ۳$$

$$۴- \text{برای هر } x \text{ و } y \text{ در } M \text{ داشته باشیم: } r.(x + y) = rx + ry; r \in R$$

$$۵- \text{برای هر } x \text{ در } M \text{ و } r, s \in R, (r + s).x = rx + sx$$

$$۶- \text{برای هر } x \text{ در } M \text{ و } r, s \in R, (r.s).x = r.(s.x)$$

$$۷- \text{برای هر } x \text{ در } M, 1.x = x$$

تعریف ۱.۱.۲۳ یک هم ریختی R مدولی یا اصطلاحاً R -هم ریختی را تعریف میکنیم که: هرگاه R یک حلقه و M و N دو R -مدول باشند آنگاه نگاشت $f: M \rightarrow N$ را یک R همریختی یا اصطلاحاً یک هم ریختی R مدولی مینامیم هرگاه چنان داشته باشیم که:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad (1)$$

$$f(ra) = r.f(a) \quad (2)$$

در اینجا نکته حائز اهمیت آنست که در تعریف بالا اعمال جمع و ضرب اسکالر در سمت چپ تعریف، مربوط به R -مدول M بوده و اعمال جمع و ضرب اسکالر در سمت راست تعریف مربوط به R -مدول N میباشد.

تعریف ۱.۱.۲۴ اگر R یک حلقه باشد آنگاه گوییم R در شرط زنجیر صعودی^۱ برای ایده آل های چپ یا راست خود صادق است هرگاه زنجیر شمول ایده آل های زیر :

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \dots$$

به انتها برسد یا اصطلاحاً پایان پذیر باشد. به این معنا که داشته باشیم:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n; I_k = I_n \quad (\forall 1 < i < n, I_i \subsetneq R)$$

تعریف ۱.۱.۲۵ گوییم M یک R -مدول دوری است هرگاه داشته باشیم:

$$M = (x) = R.x = \{rx | r \in R\}$$

تعریف ۱.۱.۲۶ اگر R یک حلقه باشد آنگاه گوییم R یک حلقه نوتری است

^۱Ascending Chain Condition

هرگاه در شرط زنجیر صعودی روی ایده آل های چپ یا راست خود صدق کند. یک حلقه را نوتری مینامیم هرگاه هم نوتری راست باشد و هم نوتری چپ.

تعریف ۱.۱.۲۷ گوییم حلقه R یک حلقه موضعی^۲ است هرگاه یکی از تعاریف زیر صادق باشد:

- ۱- R دارای یک ایده آل ماکسیمال منحصر بفرد چپ یا راست باشد.
- ۲- $1_R \neq 0$ و دو عنصر غیر یکه a, b چنان موجود باشند که: $a + b = c$ غیر یکه باشد.
- ۳- $1_R \neq 0, x \in R, 1 - x$ آنگاه $1 - x$ یکه باشد.
- ۴- هر جمع متساوی یک در این حلقه داری حداقل یک قسمت از جمع یکه ها باشد.

تعریف ۱.۱.۲۸ گوییم M یک R -مدول نوتری است هرگاه در شرط زنجیری صعودی زیر مدولهایش صدق کند.

تعریف ۱.۱.۲۹ گوییم R مدول M یک R -مدول بدیهی است هرگاه ضرب اسکالر تعریف شده آن ضرب بدیهی صفر باشد.

تعریف ۱.۱.۳۰ اگر که M یک R -مدول باشد و $N \subseteq M$ گوییم N یک R -زیر مدولی از M است هرگاه تحت عمل جمع و ضرب اسکالر M یک R -مدول باشد.

تعریف ۱.۱.۳۱ گوییم M یک R -مدول ساده است هرگاه: $0 \neq M \leq M$

تعریف ۱.۱.۳۲ گوییم حلقه R یک حلقه گسسته مقدار^۳ است هرگاه R یک حوزه ایده آل اصلی^۴ یا به اختصار PID باشد که دقیقاً دارای یک ایده آل غیر صفر ماکسیمال است.

تعریف ۱.۱.۳۳ فرض کنید که M یک R -مدول و نیز $r \in R$ باشد. اگر: $rM = M$ را بخشپذیر توسط r گوییم. اگر R یک ID و M توسط هر عضو R بخشپذیر باشد گوییم M یک R -مدول بخشپذیر یا تقسیم پذیر است.^۵

تعریف ۱.۱.۳۴ این زنجیره از هم ریختی های R -مدولی را یک زنجیر دقیق کوتاه مینامیم.

$$0 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{K} 0$$

فصل ۴

قضایای مقدماتی و مهم در اثبات مسئله

۱.۰.۴ قضایای ذکر شده و مهم

در این قسمت از مقاله هدف ما اینست که به بیان تعاریف و قضایای مهم در روند اثبات مسئله بپردازیم. علاوه بر این مطالب قصد ما از بیان این مسائل طرح و تشریح مثالهایی در باب قضایای گفته شده و نیز تفسیر مثالهایی برای تعاریف گفته شده در فصل قبلی برای هر چه بیشتر آشنا شدن با مطالب و موضوعات گفته شده در متن است. این قسمت به بیان مثالهایی خواهیم پرداخت که در باره اثبات قضیه اصلی این مقاله از آن جهت مفید خواهند بود که در روند اثبات قضیه اصلی از این اثباتها و قضایای و نتایج مربوط به آنها استفاده خواهیم کرد. اهمیت این بخش از مقاله از آن جهت است که برای اثبات قضیه اصلی احتیاج است تا برخی از قضایای مهم و نیز مثالهایی را که برای تشریح مسائل این مقاله گفته شود را بیان و بسط و شرح بدهیم. بدیهی است که توجه خاص به این فصل از آن جهت حائز اهمیت است که به استناد به این فصل و مطالب مربوط به آن میتوانیم در باب مطالب اصلی این مقاله صحبت کرده و به نتایجی برسیم که در درک روند اثبات مسئله بسیار مفید خواهند بود.

قضایای اصلی و تشریح مسائل مهم

برای قسمت نخست از این فصل لازم است تا به تشریح مثالهایی برای تعاریف گفته شده در فصل قبلی بپردازیم تا به تعبیری با دنیای تعاریف گفته شده و نیز اطلاعات لازم برای حل مسائل بیشتر آشنا بشویم. برای این منظور با ذکر مثالهایی برای تعاریف شروع میکنیم.

مثال ۱: در تعریف ۱.۱.۴ برای یک حوزه صحیح میتوان حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر گرفت. چرا که بدیهی است این حلقه در تعریف گفته شده صادق است و لذا از جهتی دیگر که در دروس گذشته بدان اشاره شد میدانیم که هر حوزه صحیح متناهی حتی دارای تعریف پیشرفته میدان هم هست همانگونه که حلقه $\mathbb{Z}_p$ چنین است.

مثال ۲: برای ایده آل های یک حلقه از راه تعریف میتوان ایده آل ها و اشکال مختلفی از آنها را متناسب با نوع ساختار حلقه و تعاریف آن بدست آورد ولی برخی از حلقه ها دارای ایده آل های خاصی از لحاظ شکل ساختاری و معنایی هستند. برای مثال میتوان ایده آل های حلقه اعداد صحیح را به فرم $n\mathbb{Z}$ یا حتی ایده آل های ماکسیمال این حلقه نیز قابل شناسایی هستند و میدانیم که به شکل $p\mathbb{Z}$ هستند که p یک عدد اول است.

مثال ۳: در جایی از فصل قبلی به تعریفی اشاره کردیم که تعریف ایده آل ماکسیمال

یک حلقه بود. همانگونه که میدانید ایده آل ماکسیمال یک حلقه بر حسب قضیه ای یک ایده آل اول نیز هست و علاوه این مطلب خاصیت مهم تری که میتواند برای ما مورد توجه باشد آنست که هر ایده آل یک حلقه باید مشمول در یک ایده آل ماکسیمال باشد. اثبات این مطلب از راه تعریف یک ایده آل ماکسیمال بسیار ساده است چون در روند این اثبات بلافصل حکم ما از فرض و تعریف یک ایده آل ماکسیمال براحتی نتیجه میشود.

مثال ۴: تعریف کردیم که بعد یک حلقه را طول بزرگترین زنجیره شمول ایده آل

های اول آن حلقه مینامیم. اجازه بدهید این مطلب را به هم بررسی کنیم. میدانیم هر میدان مثل $\mathbb{F}$ تنها دارای یک ایده آل ماکسیمال است که میدانیم اول نیز هست پس به تعبیری میتوان گفت که $\dim(\mathbb{F}) = 0$. اما ایا میتوانیم نتیجه بگیریم که عکس این مطلب هم برقرار است؟ با کمال قدرت میتوانیم بگوییم خیر چرا که برای رد این موضوع میتوانیم یک مثال بسیار راحت و نیز جالب را بکار بگیریم.

ایده آل های اول حلقه اعداد صحیح را در نظر بگیرید. میدانیم که شکل این ایده

آل ها به فرم $p\mathbb{Z}$ است که p یک عدد اول است. اما به سادگی میتوان نشان داد که: $p_1\mathbb{Z} \subsetneq p_2\mathbb{Z}$. پس این موضوع نشان میدهد که عکس گزاره فوق برقرار نیست یا حداقل همیشه برقرار نیست. مثال ۵: بر حسب تعریف یک ایده آل غیر رادیکالی در اینجا قصد داریم تا مثالی را

برای این دسته از ایده آل های خاص ارایه کنیم. به عنوان مثال ایده آل های حلقه اعداد صحیح را در نظر بگیرید. از قضیه ای میدانیم که $\sqrt{4}\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ پس با این تعریف و نیز تعریف غیر رادیکال بودن یک ایده آل داریم که: $4\mathbb{Z} \subsetneq \sqrt{4}\mathbb{Z}$. مثال ۶: برای یک مثال از حلقه های خارج قسمتی میتوانیم از حلقه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

استفاده کنیم که علاوه آنکه یک حلقه خارج قسمتی است دارای ایده آل های ماکسیمالی با این شکل است: $\text{Max } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} | n = p\}$

مثال ۷: گفتیم که یک حلقه نوتری باید داری چه ویژگی هایی باشد. به عنوان مثالی برای این دسته از حلقه های خاص حلقه ی اعداد صحیح را در نظر بگیرید. علاوه این مطلب $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$ مدول نوتری نیز هست. هر حلقه تقسیم مثل I.D یک حلقه نوتری است چون تنها ایده آل های چپ یا راست آن صفر یا خودش هستند. علاوه این مطالب هر میدانی نیز یک حلقه نوتری است.

مثال ۸: در جایی از فصل گذشته که در ارتباط با تعاریف مختلف گفته شده است، اشاره به حلقه های غیر موضعی داشتیم و به تعریف آنها پرداختیم. در اینجا قصد داریم تا مثالی را برای این دسته از حلقه ها بیاوریم. به عنوان مثال هر میدان

یک حلقه موضعی است و این مطلب به وضوح قابل بحث است. یا حتی هر حلقه غیر بدیهی که عناصر آن یا پوچتوان هستند و یا یک یک حلقه موضعی است. اثبات اینکه این مطلب به چه دلیل برقرار است از قسمت دوم و سوم تعاریف معادل موضعی بودن حلقه ها نتیجه میشود.

مثال ۹: اگر که G یک گروه آبلی باشد آنگاه پوچساز یک عنصر مثل a را به شکل رو به رو تعریف میکنیم:

$$Ann(a) = \{m \in \mathbb{Z} \mid ma = 0\}$$

حال اگر چنان داشته باشیم که a از مرتبه متناهی باشد آنگاه داریم که:

$$Ann(a) = \{kn \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle$$

اثبات این قضیه از راه تعریف پوچساز و نیز متناهی بودن مرتبه عنصری مثل a به راحتی میسر است.

مثال ۱۰: هر گروه دوری یک $\mathbb{Z}$ مدول دوری است. چرا که هر گروه آبلی در مرحله اول یک $\mathbb{Z}$ مدول است. چرا که تنها کافی است عمل ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\therefore \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, m \in M; (m, n) = nm = m + m + m + \underbrace{m + \dots + m}_n + m$$

قضیه در اینجا میخواهیم به بیان قضیه ای بپردازیم که تنها به اشاره و احیاناً ارایه مثالی برای آن اکتفا میکنیم چرا که اثبات این سه قضیه از حوصله بحث ما خارج است. این قضیه به قضیه سه گان تناظر معروف است:

۱- فرض کنید که G یک گروه و $N \trianglelefteq G$. در اینصورت تناظری یک به یک میان مجموعه زیرگروه های G شامل N و زیرگروه های G/N به شکل H/N است به قسمی که H زیرگروه G شامل N بوده و $N \trianglelefteq H$.

۲- فرض کنید R یک حلقه و I ایده آلی از آنست. در اینصورت تناظری یک به یک بین ایده آل های R که I را در بردارند و ایده آل های R/I وجود دارد.

۳- فرض کنید که R یک حلقه و I ایده آلی از آن باشد. اگر M یک R -مدول باشد هر زیر مجموعه دلخواه N از M یک R -زیر مدول از مدول M است اگر و تنها اگر N زیر مدولی از R/I -مدول M باشد.

فصل ۵

بحث اساسی مقاله و اثبات قضیه اصلی

۱.۰.۵ حلقه های با ایده آل های غیر ماکسیمال متناهی تولید شده

در این قسمت از مقاله قصد ما اینست که قضیه اساسی این مقاله را بیان و سپس اثبات نماییم. بدیهی است که دانستن تعاریف گفته شده در فصل گذشته برای درک و تحلیل هر چه بیشتر و بهتر مطلب اصلی مقاله لازم و ضروری است. در این جا چندین مطلب باید مورد توجه قرار بگیرد: ۱-اولاً، در این قسمت اثبات برخی از قضایای داده شده در متن یا گفته شده در متن جهت اثبات قضیه اصلی در صورتی موجود خواهد بود که این اثبات در حد گنجایش مطالب گفته شده باشد. لذا از اثبات مطالبی که دارای برهان طولانی هستند خودداری خواهیم کرد.

۲-دوماً، در این قسمت از مقاله هدف اثبات یک قضیه اساسی است که اثبات این قضیه خود به چند اثبات دیگر نیازمند است که در قبل از اثبات قضیه اساسی گفته خواهند شد.

قضیه (۱): فرض کنید که R یک I.D باشد. اگر که هر ایده آل غیر رادیکال R متناهی تولید شده باشد آنگاه هر ایده آل دیگر این حوزه نیز متناهی تولید شده است. به عبارت دیگر حلقه R یک حلقه نوتری است.

اثبات: طبق فرض R یک حوزه صحیح است. ادعا میکنیم هر ایده آل مثل I در این حوزه یک ایده آل محض است. به برهان خلف فرض کنید که این چنین نباشد پس با این استدلال $r \in R, r \neq 0$ را در نظر بگیرید. حال خواهیم داشت:

$$r \in r.I \Rightarrow r = r.i$$

$$\Rightarrow \nexists 1_R = i$$

$$\Rightarrow 1_R \in I$$

و از راه قضیه ای در نظریه حلقه ها با این شرط بدست آمده $R=I$ میتوان گفت که این مطلب خلاف فرضی است که گفته بودیم.

حال با یک نگاشت طبیعی چنانکه داشته باشیم:

$$f : I \rightarrow r.I$$

$$\forall r \in R ; j \in I ; f(j) = r.j \in r.I$$

که واضح است این تابع یک یکرختی است یا به عبارت بهتر: $r.I \cong I$

ایده آل محض دیگری را مثل J در نظر بگیرید. فرض کنید $0 \neq x \in J$ باشد و چون J یک ایده آل سره از حلقه است $x \notin x.J$ پس میتوانیم بگوییم ولی بنابر تعریف ایده آل غیر رادیکال بودن $x.J$ میتوانیم بگوییم که $x^2 \in x.J$ از آنجایی که $x.J$ یک ایده آل غیر رادیکالی است پس بر حسب فرض متناهی تولید شده نیز هست. مشابه با حالت قبلی میتوان با تعریف یک نگاشت طبیعی یک R هم ریختی را میان J و $x.J$ داشته باشیم یا به عبارت بهتر: $J \cong_R x.J$. از آنجایی که J میتوانست هر ایده آل دلخواهی باشد یا به عبارت بهتر شرط خاصی را از ابتدا بر روی این ایده آل نگذاشتیم، این اثبات حاکی از صحت مدعای ماست ■

قضیه: فرض کنید R یک حلقه یکدار و جابجایی باشد. اگر هر ایده آل غیر ماکسیمال R متناهی تولید شده باشد، آنگاه هر ایده آل ماکسیمال این حلقه متناهی تولید شده است. به عبارت دیگر R یک حلقه نوتری^۱ است.

اثبات:

ابتدا اجازه دهید که فرض کنیم حلقه R یک حلقه با بعد ناصفر باشد، به عبارت دیگر چه اتفاقی خواهد افتاد اگر که یک ایده آل غیر ماکسیمال اول در حلقه R موجود باشد؟ براستی اگر P یک ایده آل غیر اول ماکسیمال در حلقه R باشد آنگاه متناهی P تولید شده است. همچنین در یک حوزه صحیح مثل R/P که P در R اول است، هر ایده آل غیر ماکسیمال متناهی تولید شده است. (از آنجایی که هر ایده آل غیر ماکسیمال R/P به یک ایده آل غیر ماکسیمال نظیر میشود). پس بدین ترتیب، هر ایده آل غیر اول R/P نیز متناهی تولید شده است و با توجه به قضیه (۱)، R/P یک حلقه نوتری است یا به عبارت دیگر R/P یک R -مدول نوتری میباشد. حال فرض کنیم که یک p ایده آل غیر ماکسیمال حلقه R باشد. بدین ترتیب هر R -زیرمدول از P یا به عبارت دیگر از حلقه R که P شامل آنهاست نیز غیر ماکسیمال است. لذا متناهی تولید شده بودن P به عنوان R -مدول بر اساس فرض برقرار میشود. با این حال P یک R -مدول نوتری است. بدین ترتیب R/P و دو P - R مدول نوتری هستند. پس R -یک R مدول نوتری است یا به عبارت دیگر، R یک حلقه نوتری است. حال اجازه بدهید که نگاه کلی تری به مسئله داشته باشیم. فرض کنید حلقه R چنان باشد که تمام ایده آل های غیر ماکسیمال آن متناهی تولید شده باشد، همچنین فرض کنید که امکان داشته باشد که R نوتری نباشد. پس با توجه به استدلال گفته شده در بالا، چنین بدست می آید که R یک حلقه با بعد صفر است. از آنجا که گفتیم R نوتری نیست، با توجه به فرض مسئله باید R دارای ایده آل ماکسیمالی مثل m باشد که متناهی تولید شده نیست. حال R -زیر مدول های سره دقیقاً m ایده آل های حلقه R هستند بگونه ای که بصورت سره در موجود m هستند. حال، هر ایده آل که بصورت محض در موجود m است ماکسیمال نیست. پس با توجه به فرض داریم که مثل مدول R متناهی تولید شده

است. بدین ترتیب مشاهده میشود که یک $R\text{-}m$ مدول afg است. با توجه به این مطلب که ann_R^2 (پوچساز در m حلقه R) یک ایده آل اول از حلقه R است ولی ایده آل ماکسیمال نیست. پس میبایستی طبق این نتایج بدست آمده R یک حلقه با بعد ناصفر باشد که یک تناقض است. پس چنین نتیجه میگیریم که R باید نوتری باشد ■

در این قسمت مقاله قصد ما اینست که اثبات قضیه اصلی را با روشی دیگر انجام میدهم که در این روش از اثبات میخواهیم از روش قبلی و یا حتی از اصطلاحات آن مطلقاً بهره ای نبریم و یا به تعبیری میخواهیم روشی از اثبات این مسئله را بیان کنیم که از قضایای فوق ما را تا حدی مستقل میسازد و البته که این امر بدیهی است که استفاده از برخی قضایای گفته شده در اثبات اول و اثبات دوم در فصول قبلی مقاله که بدان ها موکدا اشاره کردیم مورد نیاز است و با این تفسیر دوباره این مطلب را بیان میکنیم که برای درک هر چه بیشتر قضایای گفته شده و نیز فهم و هضم اثباتهای درون این متن لازم است تا تعاریف و مثالهای گفته شده در فصول قبل به دقت مطالعه شود و کاربرد آنها برای بررسی بیشتر مورد توجه قرار بگیرد.

در این قسمت همانگونه که گفته شد لازم است تا این مطلب را به خوبی درک کنیم که اساساً هدف از اثبات این قضیه آولا آنست که بدانیم این قضیه مهم در ارتباط با چه مطالبی است و در وهله دوم بتوانیم برای این مسئله اثباتهای متفاوتی را پیدا کنیم که میتواند علاوه بر مفید بودن در جهت ایجاد یک زمینه ذهنی هم بسیار کمک کننده باشد. در این جا لازم به یاد آوری است که در اثبات دوم از اصطلاحاتی استفاده میکنیم که در فصلهای گذشته تعاریف و مثالهایی از آنها را به بسط داده و به تشریح آنها پرداخته ایم.

در این جا قصد داریم تا اثباتی دیگر برای قضیه اساسی مقاله ارایه بدهیم. در این اثبات دو قسمتی از تعاریفی استفاده میکنیم که خود این تعاریف و مثالهای آنها در فصلهای گذشته گفته شده و در مورد آنها بحث کرده ایم. حال اجازه بدهید تا این اثبات را شروع کنیم.

ابتدا اجازه بدهید تا اثبات این قضیه را برای حلقه های غیر موضعی^۳ انجام بدهیم. اگر R حلقه باشد که تمام ایده آل های غیر ماکسیمال آن متناهی تولید شده است هدف آنست که اثبات کنیم ایده آل های ماکسیمال این حلقه هم متناهی تولید شده هستند. اگر که m ایده آل ماکسیمال این حلقه باشد طبق تعریف ایده آل ماکسیمال دیگری مثل n موجود است که از m متمایز است. واضح است که $m \cap n$ یک ایده آل غیر ماکسیمال میباشد. علاوه این مطالب میتوان گفت که داریم: $m + n = R$ از قضیه دوم همریختی R مدولی نتیجه میشود که:

$$m / m \cap n \cong m + n / n \cong R / n$$

از آنجایی که n یک ایده آل ماکسیمال است پس به عبارتی R/n یک R -مدول ساده است. بنابراین یک R -مدول دوری نیز هست پس قاعدتا باید متناهی تولید نیز باشد. علاوه این مطالب $m \cap n$ هم R مدول متناهی تولید شده است^۴ پس این چنین نتیجه میشود که باید m باید متناهی تولید شده باشد. چون از ابتدا شرطی را برای این ایده آل نگذاشتیم یا به عبارتی دیگر چون این ایده آل یک ایده آل دلخواه بود این اثبات حاکی از صحت مدعای ماست. (اثبات قسمت اول) در قسمت بعد اثبات یا حالت دوم برای اثبات این قضیه از اصطلاحات و تعبیری استفاده میکنیم که لازم است تا در مقدمه بحث توضیحاتی هر چند مختصر را در باب آنها بدهیم تا مطالب ذکر شده و گفته شده در این قسمت بهتر مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرد. اجازه بدهید این مطالب را بیان کنیم:

اصطلاح ۱: تفاوت میان پوچساز یک مدول و یک عنصر در تعریف زیر حایز اهمیت است:

$$Ann(M) = \{r \in R \mid r.m = 0, \forall m \in M\}$$

پوچساز یک مدول

پوچساز یک عنصر از یک مدول $Ann(m) = \{r \in R \mid r.m = 0\}$

اصطلاح ۲: تعریف یک فضای برداری مانند همان تعریف جبر خطی این مفهوم است با این تفاوت که در این قسمت تنها کافی است که یا یک حلقه یا یک مدول خارج قسمتی تشکیل یک میدان بدهد که این مطالب تنها زمانی میسر است که به عنوان مثال R/m تشکیل بشود.

اصطلاح ۳: گوئیم اگر M یک R مدول باشد و I یک ایده آل از این حلقه باشد آنگاه یک یکرختی کانونی را^۵ یک نگاشت طبیعی خارج قسمتی زیر تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned}\phi : R &\rightarrow R/I \\ \forall r \in R, \phi(r) &= r + I\end{aligned}$$

که واضح است این نگاشت خواص یک یکرختی R مدولی را دارد.

حال میخواهیم قسمت دوم اثبات را برای این قضیه تکمیل کنیم. به کار گیری اصطلاحات فوق در این قضیه منجر به این امر شد که این مطالب را به عنوان تعاریفی که در جهت پیشروی روند اثبات انتخاب میکنیم تعریف و نکاتی را در باب آنها بیان کنیم. لازم به ذکر است که علاوه بر نکات فوق از دیگر نکاتی و نیز دیگر قضایایی استفاده خواهیم کرد که با ذکر شماره یا سر عنوان آنها این مطالب را به فصلهای گذشته نسبت خواهیم داد و در متن تنها به اشاراتی از آنها اکتفا خواهیم کرد.

Canonical R-Module Isomorphism^۵

اثبات قسمت دوم در این قسمت از اثبات می‌خواهیم تا اثبات را برای حلقه های موضعی انجام بدهیم. اگر حلقه R حلقه ای باشد که موضعی و نیز دارای یک ایده آل ماکسیمال منحصر بفردی مثل m است به قسمی که هر ایده آل غیر ماکسیمال این حلقه متناهی تولید شده است. تنها کاری را که می‌بایستی به آن پردازیم و در حقیقت مطلوب ما در این مسئله است آنست که اثبات کنیم m هم متناهی تولید شده است. اگر که داشته باشیم $m = 0$ آنگاه اثبات تمام شده است. فرض کنید که این چنین نباشد. از آنجایی که $ann_R(m)$ یک ایده آل محض از این حلقه است پس دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم:

حالت اول: $ann_R(m) \subsetneq m$

حالت دوم: $ann_r(m) = m$

ابتدا اجازه بدهید که حالت اول را با هم بررسی کنیم. فرض کنید که برای r ثابت که $r \in m - ann_R(m)$ باشد. پس میتوانیم نتیجه بگیریم که $r \cdot m \neq 0$ پس داریم $ann_R(r) \neq m$ نتیجه آنکه باید $ann_R(r)$ متناهی تولید شده باشد. علاوه این موضوع طبق قضیه ۳ چون $ann_R(r)$ یک ایده آل محض از این حلقه است و چون R یک حلقه موضعی است پس داریم که $r \cdot m \neq m \cdot ann_R(r) \subsetneq m$ ، چرا که اگر چنین نباشد پس $r \cdot m = m \Rightarrow r = r \cdot x$ (for some $x \in m$) از این قسمت میتوانیم بر حسب تعریف بگوییم که: $(1-x) \cdot r = 0$ و بدین ترتیب نتیجه میشود که حلقه موضعی R دارای عنصر یکه $1-x$ است که نتیجه میشود $r = 0$ که به وضوح یک تناقض با تعریف و نیز فرض ما است.

از آنجایی که rm یک ایده آل غیر ماکسیمال است پس متناهی تولید شده نیز هست. حال با یک یکرختی $-R$ مدولی که عمل ضرب اسکالر را القا میکند داریم که $m/ann_R(r) \cong r \cdot m$. از این قسمت داریم که باید $m/ann_R(r)$ یک R مدول متناهی تولید شده باشد به قسمی که چون $ann_R(r)$ متناهی تولید شده است این نتیجه را دارد که باید m یک R مدول متناهی تولید شده باشد. این مطلب نتیجه $ann_R(m) \subsetneq m$ را به هم نمیریزد.

حال اجازه بدهید تا حالت دوم را با هم دیگر بررسی کنیم. در این جا می‌بایستی مشابه حالت فوق داشته باشیم که m باید یک R/m مدول باشد

که عمل ضرب این مدول طبق قضیه ۲ خوشتعریف با تعریف زیر است:

$$\forall x \in R, y \in m; (x + m).y = x.y$$

پس R/m زیر مدول های m دقیقا ایده آل های مشمول در m حلقه R هستند. اگر m متناهی تولید شده نباشد آنگاه باید یک فضای برداری با بعد نامتناهی به فرم R/m باشد. اما از راه نکته* میدانیم که هر فضای برداری از بعد نامتناهی دارای یک زیر فضای برداری با بعد نامتناهی است پس به این دلیل باید اید آلی به قسمی موجود باشد که محض در m است و علاوه این مطالب باید به مشابه R/m از بعد نامتناهی باشد که یک فضای برداری است. از اینجا با توجه به ساختار کانونی فضای برداری R/m و نیز با توجه به آنچه که درباره m گفتیم باید چنین نتیجه بگیریم که این ایده آل غیر ماکسیمال متناهی تولید شده به عنوان یک R مدول نیست که همین مطلب دقیقا خلاف اولین فرضی است که در این مسئله داشتیم. پی نهایتا باید m یک ایده آل متناهی تولید شده باشد ■

اثبات قضیه تمام شده و در اصل مطالب گفته شده تحلیل و بررسی شده اند. اما برای آنکه بیشتر درباره این قضیه به بحث و بررسی بپردازیم لازم است تا به نکته ای ظریف در این مقاله اشاره کنیم. در تمام اجزای این مقاله به اثباتهای گوناگونی و نیز نکات و قضایای متعددی اشاره کردیم که در اثبات این مسئله بسیار مفید و پرکاربرد بودند اما نکته ای که در آن جا شاید فراموش شده باقی مانده است آنست که در این مقاله هیچ اشاره ای به اینکه مثالی را برای خود قضیه اساسی بیاوریم مطرح نکردیم. در اینجا قصد داریم تا هر چند مختصر ولی با تشریح برخی از نکات گفته شده در مقاله این مطلب را روشن کرده و برای درک هر چه بیشتر آن به طرح مطالبی نیز بپردازیم که در حین اثبات از آنها استفاده های فراوانی کردیم. برای مثالی ساده از این دسته از حلقه ها باز میتوانیم از حلقه پرکاربرد اعداد صحیح استفاده کنیم که این مطلب به خوبی برای آنها صادق است. میدانیم که هر ایده آل غیر ماکسیمال حلقه اعداد صحیح انست که مثلاً $n\mathbb{Z}$ عددی غیر اول باشد. از جایی دیگر هم میدانیم که تمام این ایده آل ها تولید شده توسط n هستند پس این مطلب به وضوح شرایط قضیه اسای ما را برآورده میکند و به این ترتیب میتوان از این مثال برای مطلب اصلی این مقاله استفاده کرد.

فصل ۶

نمایه

۱.۰.۶ معرفی نمادگذاریها

$\cong_R$: هم ریختی R مدولی یا R هم ریختی

$\subseteq$: ایده آل

$\leq$: زیر مدول بودن

R/I : ایده آل های خارج قسمتی

$\mathfrak{p}$: یک ایده آل اول حلقه

$\text{ann}(R)$: پوچساز حلقه R

R یا R : حلقه R

فصل ۷

فهرست منابع و مآخذ

- ۱- م. ر. درفشه، جبر (حلقه، میدان و نظریه گالوا)، جلد دوم، چاپ دوم، ۱۳۸۹، موسسه انتشارات دانشگاه تهران
- ۲- س. یاسمی، م. ر. پورنکی، مقدمه ای بر نظریه مدولها، چاپ دوم، ۱۳۸۶، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف
- ۳- م. معانی شیرازی، مباحثی در نظریه حلقه و مدول، چاپ سوم، ۱۳۸۸، انتشارات دانشگاه پیام نور
- ۴- ج. فرالی، نخستین درس در جبر مجرد (جلد دوم)، ترجمه مسعود فرزاد، چاپ هشتم، ۱۳۸۳، مرکز نشر دانشگاهی
- 3-I. Kaplansky, Commutative rings, University of Chicago Press.
- 4-W.D Weakley, Modules whose proper submodules are finitely generated, J. Algebra 84(1983).189-219.
- 5-E. Armendariz, Ring with an almost Noetherian ring of fractions, Math. Scand. 41(1977), 15-18
- 6-Souvik Dey, Commutative Rings With Every Non-Maximal Ideal Finitely Generated, arXiv[math.AC], 8 jul 2018