روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

- روش‌های یک مرحله‌ای

برای پیش بینی مقدار $y(x+h)$ فقط از اطلاعات مربوط به $y(x)$ استفاده می شود.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h$$

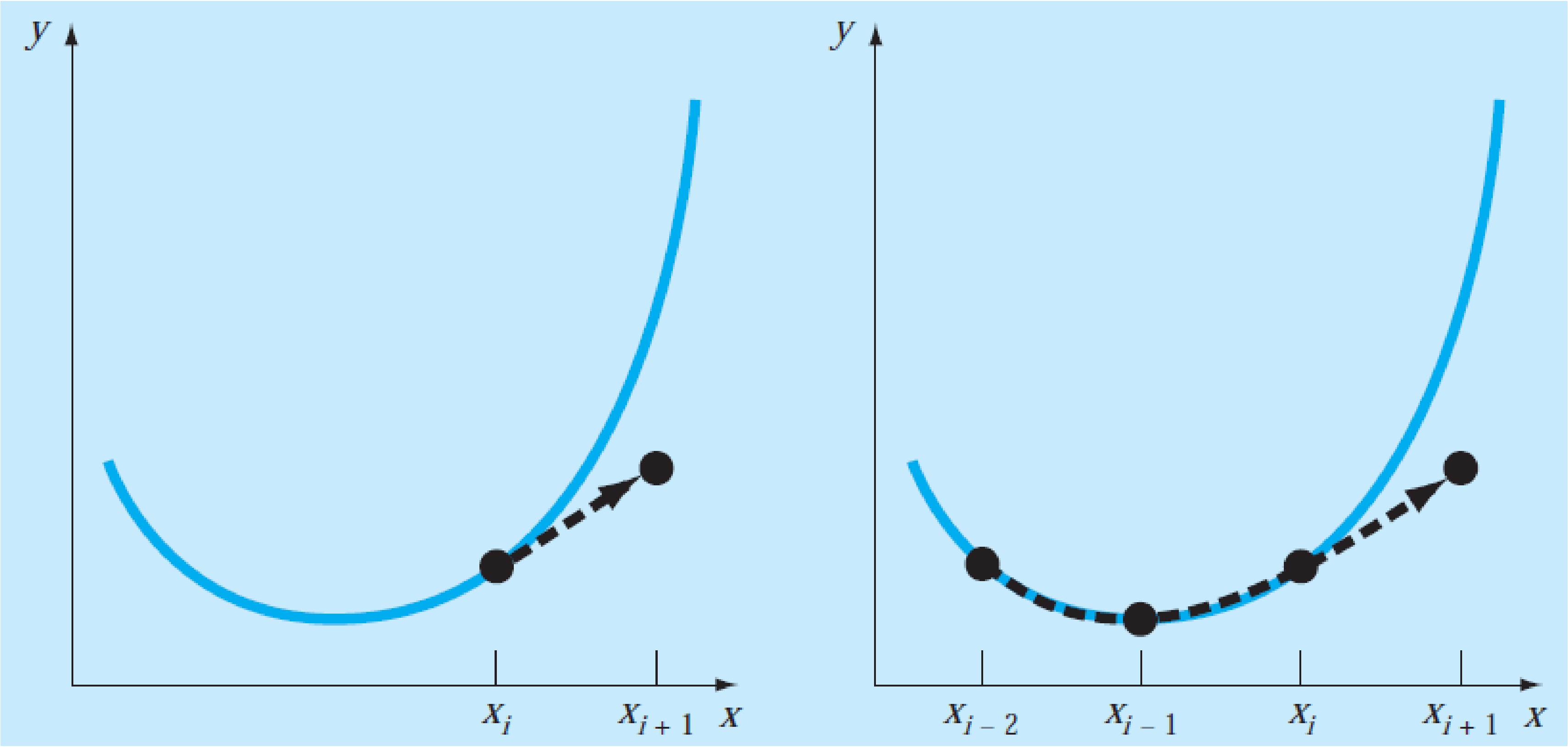
- روش‌های چند مرحله‌ای

برای پیش‌بینی مقدار $y(x+h)$ از اطلاعات مربوط به $(y(x),y(x-h),y(x-2h), \ldots)$ استفاده می‌شود.

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{3}{2}f(y_i) - \frac{1}{2}f(y_{i-1})\right)$$

$$\mathbf{y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{23}{12}f(y_i) - \frac{16}{12}f(y_{i-1}) + \frac{5}{12}f(y_{i-2})\right)}$$

روش‌های چند مرحله‌ای (Multistep Methods)



توصیف گرافیکی روش‌های یک گامی و چند گامی

روش فرمول باز Adams یا روش Adams-Bashforth

راه‌های مختلفی برای استخراج روابط Adams-Bashforth وجود دارد. یک راه استفاده از سری تیلور است:

$$y_{i+1} = y_i + f_i h + \frac{f_i'}{2} h^2 + \frac{f_i''}{6} h^3 + \cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(f_i + \frac{h}{2} f_i' + \frac{h^2}{3!} f_i'' + \cdots \right)$$

با استفاده از تقریب Backward مقدار مشتق تابع f را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{f_i''}{2} h + O(h^2)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left\{ f_i + \frac{h}{2}\left[\frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{f_i''}{2} h + O(h^2) \right] + \frac{h^2}{6} f_i'' + \cdots \right\}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{3}{2} f_i - \frac{1}{2} f_{i-1} \right) + \frac{5}{12} h^3 f_i'' + O(h^4)}$$

روش آدامز فرمول باز مرتبه ۲

روش‌های Adams

❖ می‌توان با تقریب مرتبه بالاتر مشتقات، روش‌های آدامز فرمول-باز با مرتبه بالاتر ایجاد کرد. در حالت کلی رابطه آدامز فرمول-باز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i-k} + O(h^{n+1})}$$

Order	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	Error
1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\xi)$
2	3/2	−1/2					$\frac{5}{12}h^3 f''(\xi)$
3	23/12	−16/12	5/12				$\frac{9}{24}h^4 f^{(3)}(\xi)$
4	55/24	−59/24	37/24	−9/24			$\frac{251}{720}h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	1901/720	−2774/720	2616/720	−1274/720	251/720		$\frac{475}{1440}h^6 f^{(5)}(\xi)$
6	4277/720	−7923/720	9982/720	−7298/720	2877/720	−475/720	$\frac{19,087}{60,480}h^7 f^{(6)}(\xi)$

ضرایب و خطای قطع برای پیش‌بینی کننده آدامز-بشفورث

روش فرمول بسته Adams یا روش Adams-Moulton

با استفاده از بسط تیلور رو به عقب حول نقطه x_{i+1} داریم:

$$y_i = y_{i+1} - f_{i+1}h + \frac{f'_{i+1}}{2}h^2 - \frac{f''_{i+1}}{3!}h^3 + \cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(f_{i+1} - \frac{h}{2}\, f'_{i+1} + \frac{h^2}{6}\, f''_{i+1} + \cdots \right)$$

مقدار مشتق مرتبه اول از رابطه زیر تخمین زده می‌شود:

$$f'_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{f''_{i+1}}{2}h + O(h^2)$$

روش آدامز فرمول-بسته مرتبه ۲

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{1}{2}\, f_{i+1} + \frac{1}{2}\, f_i\right) - \frac{1}{12}h^3 f''_{i+1} - O(h^4)$$

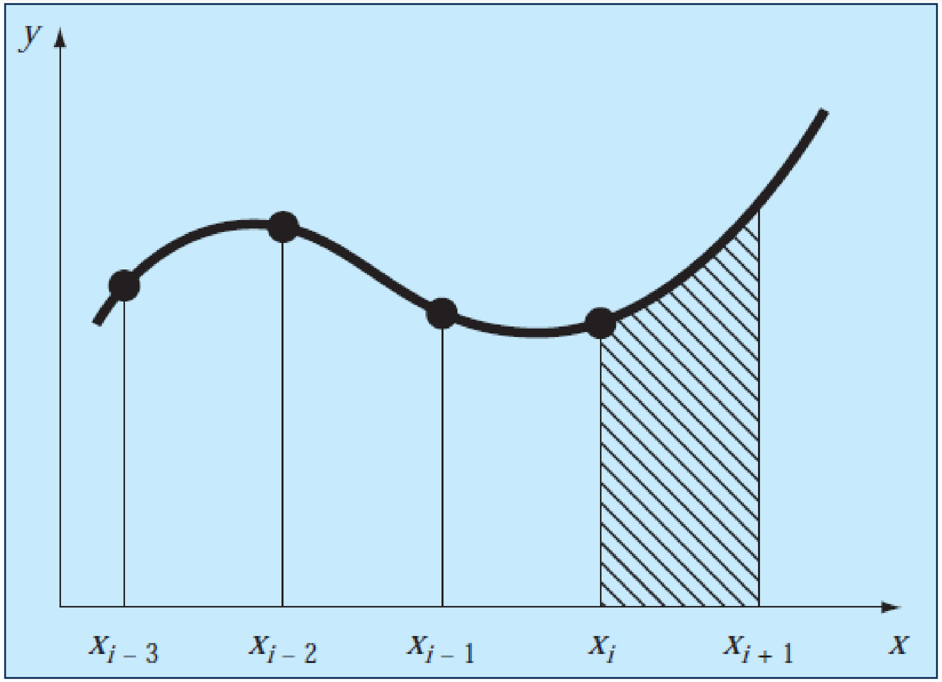
❖ می‌توان با تقریب مرتبه بالاتر مشتقات، روش‌های آدامز فرمول-بسته با مرتبه بالاتر ایجاد کرد. در حالت کلی رابطه آدامز فرمول-بسته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i+1-k} + O(h^{n+1})}$$

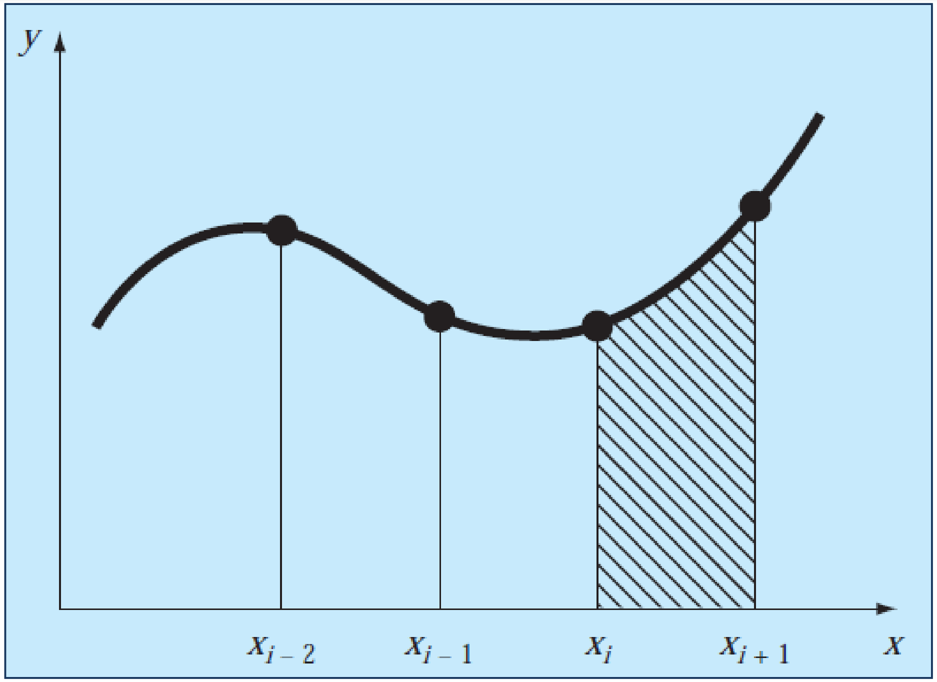
Order	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	Error
2	1/2	1/2					$-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi)$
3	5/12	8/12	−1/12				$-\frac{1}{24}h^4 f^{(3)}(\xi)$
4	9/24	19/24	−5/24	1/24			$-\frac{19}{720}h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	251/720	646/720	−264/720	106/720	−19/720		$-\frac{27}{1440}h^6 f^{(5)}(\xi)$
6	475/1440	1427/1440	−798/1440	482/1440	−173/1440	27/1440	$-\frac{863}{60,480}h^7 f^{(6)}(\xi)$

ضرایب و خطای قطع برای تصحیح کننده‌های آدامز-مولتون

توصیف گرافیکی روش‌های Adams



روش Adams-Bashforth مرتبه ۴



روش Adams-Moulton مرتبه ۴

Predictor

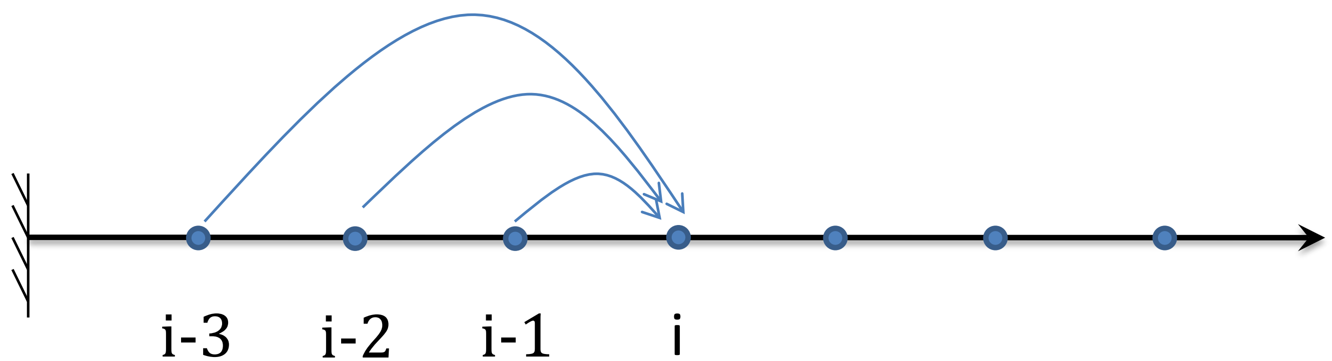
$$y_{i+1}^{0} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right) + \frac{251}{720}h^5 f_{\xi}^{(4)}$$

Corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9f_{i+1}^{0} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right) + \frac{-19}{720}h^5 f_{\eta}^{(4)}$$

روش‌های Adams

- نقطه قوت روش‌های چند مرحله‌ای دقت بالاتر و نیاز به تکرار کمتر است.
- وقتی تعداد نقاط زیاد می‌شود احتمال ناپایداری حل وجود دارد.
- در نقاط ابتدایی نمی‌توان از روش‌های مرتبه بالا استفاده کرد. در نقطه اول باید از روش تک مرحله‌ای (ME) استفاده کرد و به تدریج مرتبه روش را بالا برد.



روش چند مرحله‌ای Milne

❖ این روش، روشی چند مرحله‌ای بر اساس انتگرال‌گیری سه نقطه‌ای برای معادله Predictor می‌باشد:

$$\boxed{y_{i+1}^{0} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right) + \frac{14}{45}h^5 f_{\xi}^{(5)}}$$

همچنین برای Corrector داریم:

$$\boxed{y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i+1}^{0} + 4f_i + f_{i-1}\right) + \frac{-1}{90}h^5 f_{\eta}^{(5)}}$$

بررسی شرط همگرایی در روش آدامز مولتون

- معمولاً در روش‌های Milne و Adams-Moulton اصلاح مجدد (Re-correction) انجام نمی‌شود. سعی می‌شود مقدار h به اندازه کافی کوچک انتخاب شود. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y_p= Value of y_{n+1} from predictor formula
y_c= Value of y_{n+1} from corrector formula
y_{cc},y_{ccc}, etc. = values of y_{n+1} if successive re-corrections are made,
y_{∞}= value of which successive re-correction converge
$D=y_c-y_p$

مقدار تغییرات در y_c با انجام یک مرحله اصلاح مجدد:

$$y_{cc} - y_c = \left(y_n + \frac{h}{24}(9y'_c + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \right)$$
$$- \left(y_n + \frac{h}{24}(9y'_p + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \right)$$
$$= \frac{9h}{24}(y'_c - y'_p)$$

$$(y'_c - y'_p) = f(x_{n+1}, y_c) - f(x_{n+1}, y_p) = \frac{f(x_{n+1}, y_c) - f(x_{n+1}, y_c)}{y_c - y_p}(y_c - y_p)$$

$$= f_y(\xi_1)D \qquad \xi_1 \text{ between } y_c \text{ and } y_p$$

بنابراین:

$$\boxed{(y_{cc} - y_c) = \frac{9hD}{24} f_y(\xi_1)}$$

با انجام اصلاح مجدد، داریم:

$$(y_{ccc} - y_{cc}) = \frac{9h}{24}(y'_{cc} - y'_c)$$

$$= \frac{9h}{24} f_y(\xi_2)(y_{cc} - y_c)$$

$$= \frac{9h}{24} f_y(\xi_2)\left(\frac{9hD}{24} f_y(\xi_1)\right)$$

$$= \left(\frac{9h}{24}\right)^2 \left[f_y(\xi)\right]^2 \qquad \xi \text{ between } y_c \text{ and } y_{cc}$$

فرض بر این است که تابع f پیوسته است. علامت مقدار تابع f در نقطه کسی یکسان است.

مقدار y در مرحله نهایی اصلاح:

$$y_\infty = y_p + (y_c - y_p) + (y_{cc} - y_c) + (y_{ccc} - y_{cc}) + \dots$$

$$= y_p + D + \frac{9hf_y(\xi)}{24} D + \left(\frac{9hf_y(\xi)}{24}\right)^2 D + \left(\frac{9hf_y(\xi)}{24}\right)^3 D + \dots$$

غیر از جمله y_p بقیه جملات نشان دهنده یک سری هستند. <u>در صورتی که نسبت کسر کمتر از یک باشد، سری، همگراست.</u>

$$y_\infty = y_p + \frac{D}{1-r}, \; r = \frac{9hf_y(\xi)}{24} \quad \xi \; between \; y_p \; and \; y_\infty$$

زمانی اصلاح مجدد منجر به همگرایی می‌شود که شرط زیر برقرار باشد:

$$|r| = \frac{h\left|f_y(\xi)\right|}{24/9} = \frac{h\left|f_y(x_n, y_n)\right|}{24/9} < 1$$

<u>**شرط اول همگرایی:**</u>

$$\boxed{h < \frac{24/9}{\left|f_y(x_n, y_n)\right|}}$$

بررسی شرط همگرایی

در صورتی که مقدار y_c و مقدار y_∞ در مرحله نهایی اصلاح با هم اختلافی از مرتبه 10^{-N} داشته باشند:

$$y_\infty - y_c = \left(y_p + \frac{D}{1-r} \right) - (y_p + D) = \frac{rD}{1-r} < 10^{-N}$$

$$\boldsymbol{if\ r \ll 1 \qquad \frac{r}{1-r} = r}$$

بنابراین شرط همگرایی دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{\boldsymbol{D.10^N < \left|\frac{1}{r}\right| = \frac{24/9}{h\left|f_y(x_n, y_n)\right|}}}$$

معیار دقت این روش: (Accuracy Criterion)

$$D \cdot 10^N < 14.2$$

مثال

- شرط همگرایی روش آدامز-مولتن را برای تابع زیر بررسی کنید:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - 3y \ , \ y(0) = 1$$

$$\begin{cases} h < \dfrac{24/9}{\left|f_y(x_n, y_n)\right|} \quad h < \dfrac{24/9}{\left|-3\right|} = 0.89 \\[2ex] \boldsymbol{D.10^N < \left|\dfrac{1}{r}\right| = \dfrac{24/9}{h\left|f_y(x_n, y_n)\right|}} \\[2ex] if\ h = 0.2 \ \rightarrow D < \dfrac{24/9}{0.2\left|-3\right|10^5} = 4.4\times10^{-5} \\[2ex] D < 14.2\times10^{-5} \end{cases}$$

ناپایداری در روش Milne

❖ یکی از مشکلات روش Milne، ناپایداری آن است. با ذکر یک مثال این ناپایداری را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad y(x_0) = y_0$$

حل تحلیل این معادله به صورت زیر است:

$$y_n = y_0 e^{A(x_n - x_0)}$$

مرحله Corrector برای روش Milne به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(Ay_{n+1} + 4Ay_n + Ay_{n-1})$$

$$\left(1 - \frac{hA}{3}\right) y_{n+1} - \frac{4hA}{3} y_n - \left(1 + \frac{hA}{3}\right) y_{n-1} = 0$$

جواب معادله را می‌توان در حالت کلی زیر نوشت:

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n$$

در این رابطه Z_1 و Z_2 ریشه معادله درجه دوم زیر (معادله مفسر) هستند:

$$\left(1-\frac{hA}{3}\right)Z^2 - \frac{4hA}{3}Z - \left(1+\frac{hA}{3}\right) = 0$$

ریشه‌های این معادله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{hA}{3} = r \rightarrow \begin{cases} Z_1 = \dfrac{2r + \sqrt{3r^2+1}}{1-r} \\ Z_2 = \dfrac{2r - \sqrt{3r^2+1}}{1-r} \end{cases}$$

در صورتی که مقدار h به سمت صفر میل کند، مقدار r هم به سمت صفر میل می‌کند. در عین حال ترم r^2 با سرعت بیشتر به سمت صفر میل می‌کند.

$$Z_1=\frac{2r+1}{1-r}=1+3r+O(r^2)=1+Ah+O(h^2)$$

$$Z_2=\frac{2r-1}{1-r}=-1+r+O(r^2)=-\left(1-\frac{Ah}{3}\right)+O(h^2)$$

اگر نتایج فوق را با سری مک لارن مقایسه کنیم، می‌توان نوشت:

$$e^{hA}=1+Ah+O(h^2)$$

$$e^{-hA/3}=-\left(1-\frac{Ah}{3}\right)+O(h^2)$$

$$h\to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_1=e^{hA} \\ Z_1=-e^{-hA/3} \end{cases}$$

$$y_n=C_1\left(e^{hA}\right)^n+C_2\left(e^{-hA/3}\right)^n=C_1e^{A(x_n-x_0)}+C_2e^{-A(x_n-x_0)/3}$$

حل معادله شامل دو قسمت است. جمله اول کاملاً مشابه جمله حل تحلیلی است. جمله دوم به عنوان جمله پارازیتی شناخته می‌شود. در صورتی که A مقداری منفی باشد، این جمله افزایش می‌یابد.

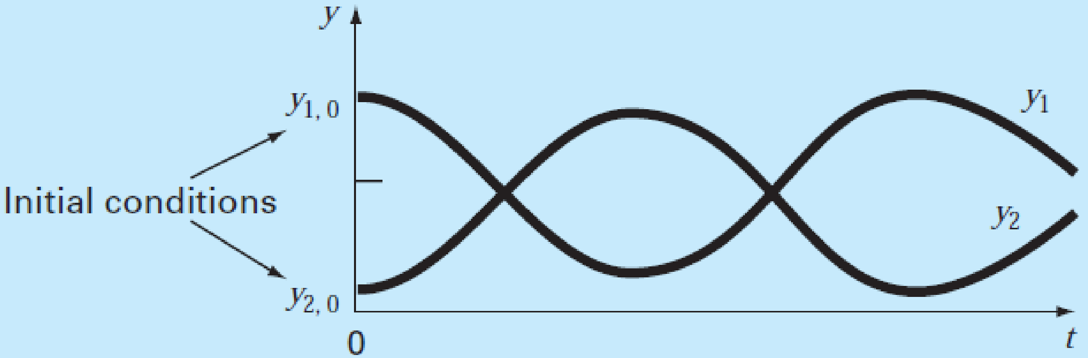
مسائل مقدار مرزی
Boundary Value Problems

مساله مقدار اولیه

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2)$$

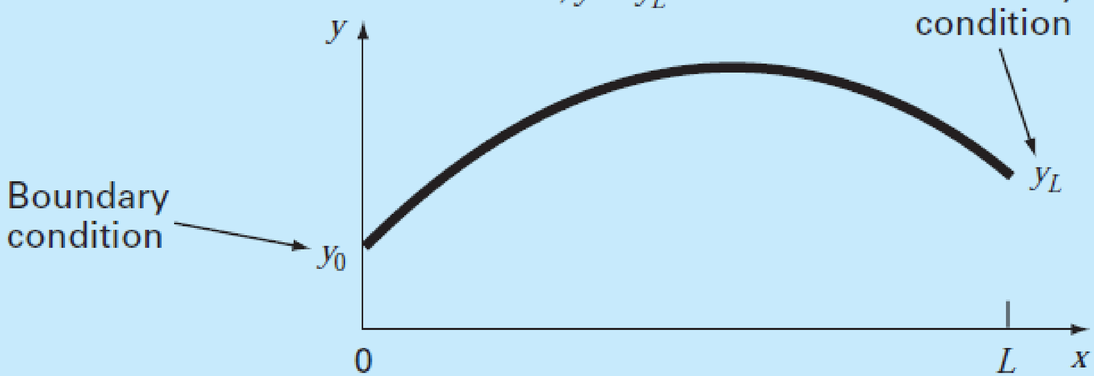
where at $t = 0$, $y_1 = y_{1,0}$ and $y_2 = y_{2,0}$

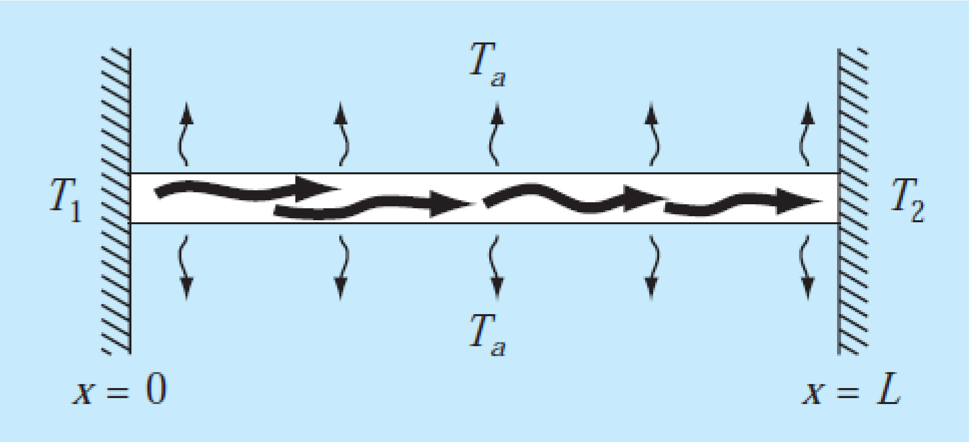


مساله مقدار مرزی

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

where at $x = 0$, $y = y_0$
$x = L$, $y = y_L$





مساله انتقال حرارت هدایت حرارتی در حالت یک‌بعدی را در نظر بگیرید. معادله انتقال حرارت در این حالت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

برای حل این معادله، لازم است که شرایط مرزی حل، تعیین شود. این شرایط مرزی، دماهای معلوم در ابتدا و انتهای میله است:

$$T(0) = T_1$$

$$T(L) = T_2$$

با معلوم بودن این شرایط، می‌توان برای این مساله حل تحلیلی بدست آورد:

$T_a = 20,\ T_1 = 40,\ T_2 = 200, \text{ and } h' = 0.01$

$$T = 73.4523e^{0.1x} - 53.4523e^{-0.1x} + 20$$

❖ این روش در واقع، تبدیل یک مساله مقدار مرزی به مساله مقدار اولیه است. در نهایت، معادله با روش سعی و خطا حل می‌شود. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 1 \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \end{cases}$$

حل تحلیلی این معادله با توجه به شرایط مرزی داده شده به صورت زیر است:

$$x(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \qquad c_1 = -3 \text{ and } c_2 = 1$$

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

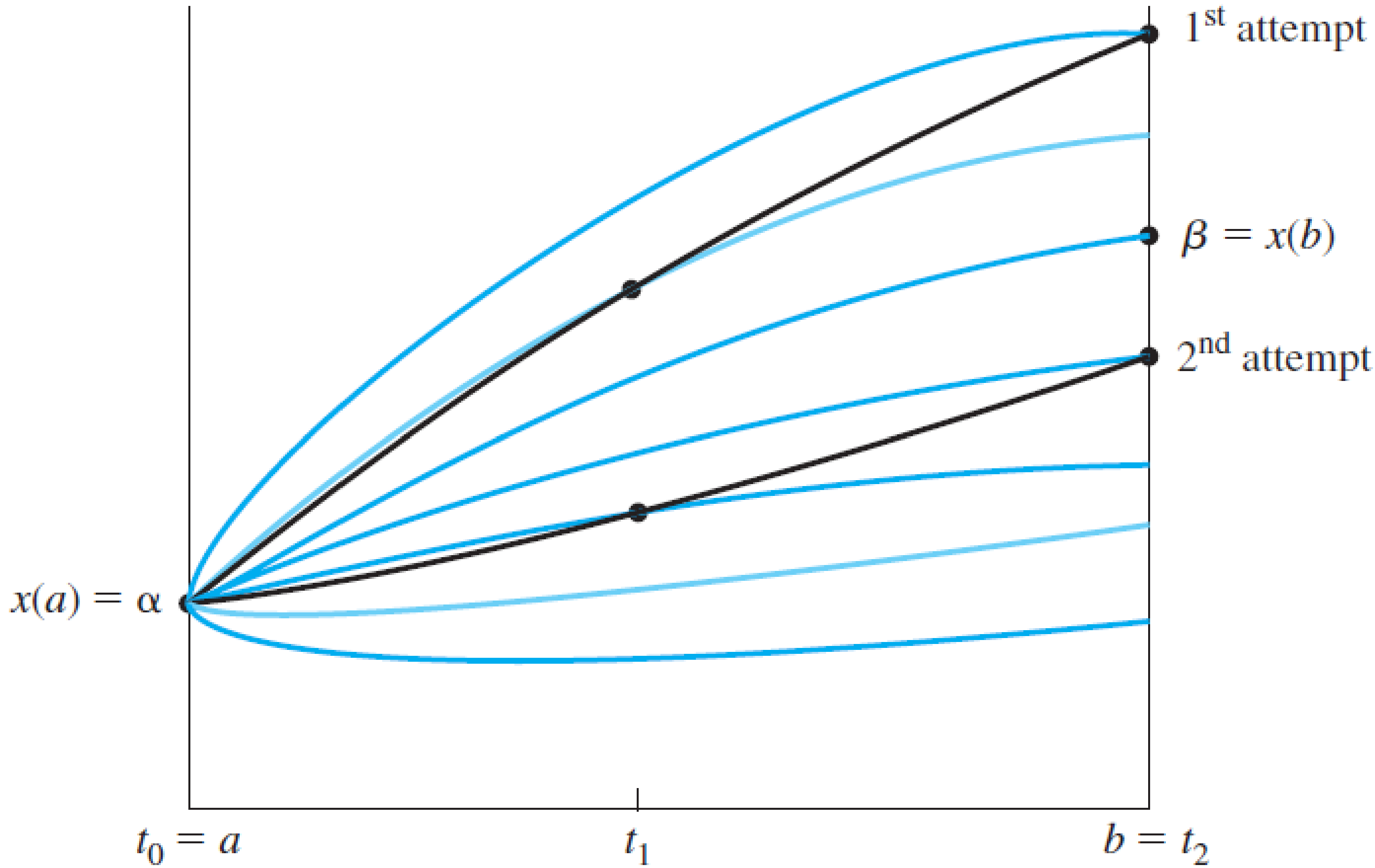
$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta \end{cases}$$

❖ برای حل این معادله با استفاده از روش‌های مقدار اولیه می‌توان در ابتدا x'(a) را حدس زد. در این صورت یک مساله مقدار اولیه داریم. با حل این مساله مقدار اولیه می‌توان x(b) را محاسبه کرد. در صورتی که x(b)=β باشد که حدس اولیه درست است. در غیر این صورت باید مجدداً حدس اصلاح شده و با روش سعی و خطا، مساله حل شود. این روش را Shooting Method می‌نامند.

مشاهده می‌شود که مقدار نهایی x(b) در این روش وابسته به x’(a) است. فرض می‌کنیم:

$$x'(a) = z$$

در این حالت مقدار x(b)، تابعی از z است. این تابع را به صورت φ(z) فرض می‌کنیم.



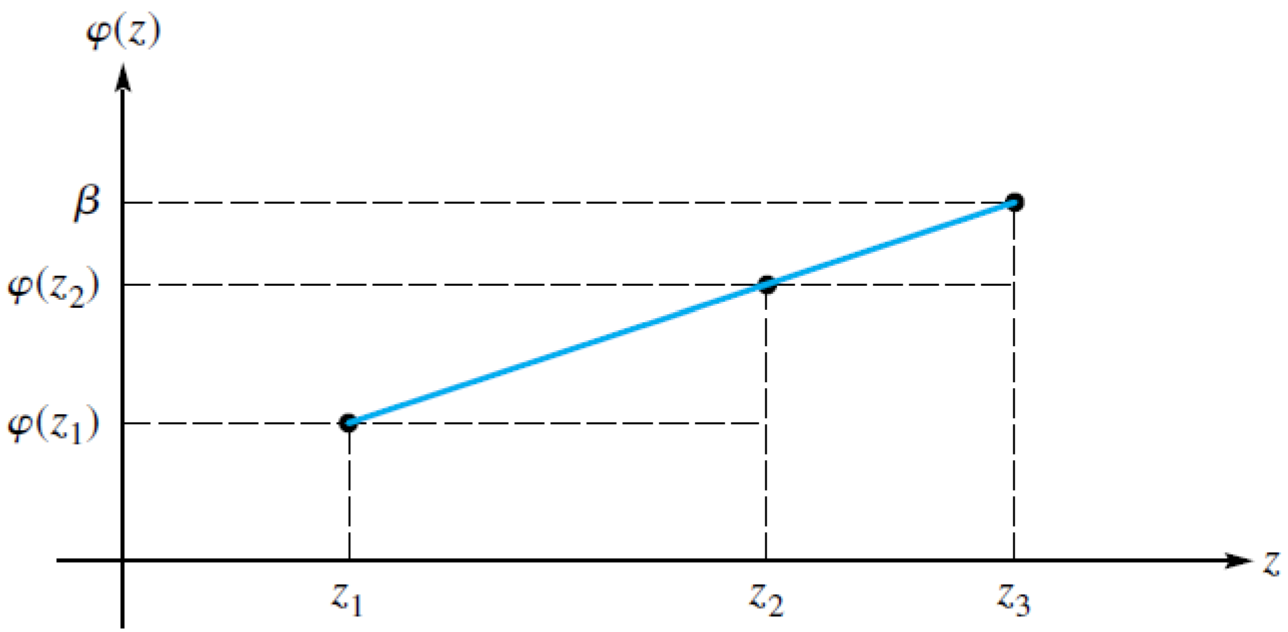
معادله دیفرانسیل مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x'' = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(a) = \alpha \qquad x'(a) = z \end{cases}$$

در محدوده [a,b]، فرض کنید: $\varphi(z) = x(b)$

هدف این است که: $\varphi(z) = \beta$

یک راه این است که از توزیع خطی استفاده شود. به عنوان مثال در صورتی که z_1 و z_2 دو حدس اولیه باشد که برای x’(a) فرض می‌شود، مقدار z با استفاده تقریب خطی تابع φ تعیین می‌شود.



Shooting Method Algorithm

$$\frac{z_3 - z_2}{\beta - \varphi(z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

$$z_3 = z_2 + [\beta - \varphi(z_2)]\left[\frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}\right]$$

این روند را تا رسیدن به جواب نهایی درست می‌توان انجام داد:

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + [\beta - \varphi(z_n)]\left[\frac{z_n - z_{n-1}}{\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})}\right] \qquad (n \geqq 2)}$$

تذکر: در این روش می‌توان از تقریب‌های مرتبه بالاتر نیز برای محاسبه تابع φ استفاده کرد.

z_1	z_2	z_3	z_4
$\varphi(z_1)$	$\varphi(z_2)$	$\varphi(z_3)$	$\varphi(z_4)$

$$p_3(z_5) = \beta$$

روش اختلاف محدود (Finite Difference Method)

❖ با استفاده از روش‌های اختلاف محدود می‌توان معادلات دیفرانسیل معمولی مقدار مرزی را حل نمود. به عنوان مثال با تقریب مشتق مرتبه ۲ در روش نیوتن برای معادله هدایت حرارتی یک بعدی، می‌توان نوشت:

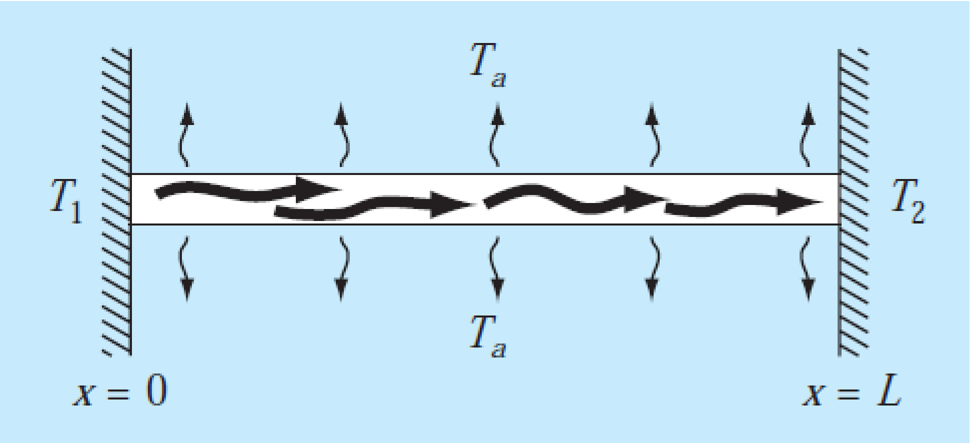
$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - h'(T_i - T_a) = 0$$

$$\boxed{-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a}$$

❖ رابطه فوق برای تمام نقاط میدان حل، اعمال می‌شود. در نهایت یک سری معادله داریم. معادلات فوق یک دستگاه معادله سه-قطری را در محدوده حل ایجاد می‌کند که با حل آن می‌توان مقادیر مجهول را در نقاط مختلف به‌دست آورد.



$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0 \\ h' = 0.01\ \text{m}^{-2},\ T_a = 20 \\ T(0) = 40 \qquad T(10) = 200 \end{cases}$$

$$\boxed{-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a}$$

معادله فوق را با فرض روبرو اعمال کنید: $\Delta x = 2\ \text{m}$

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{Bmatrix}$$

$$\{T\}^T = \lfloor 65.9698 \quad 93.7785 \quad 124.5382 \quad 159.4795 \rfloor$$

❖ شرط مرزی در مسائل مقدار مرزی اهمیت دارد. در مثال قبل شرط مرزی دریخله (Dirichlet) بررسی شد. شرط مرزی در برخی مواقع می‌تواند از نوع نیومن (Neumann) باشد.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0 \qquad \frac{dT}{dx}(0) = T_a' \qquad T(L) = T_b$$

در این حالت مقدار دما در نقطه (0) مجهول است. فرض کنید که این معادله را برای این نقطه میدان حل به‌کار ببریم.

$$-T_{-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_0 - T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty$$

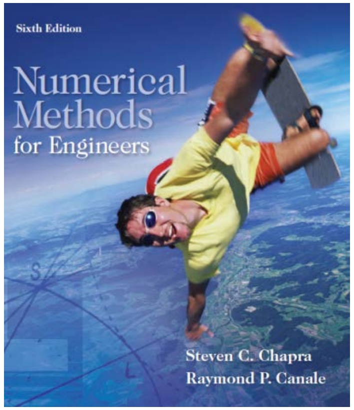
مشاهده می‌شود که لازم است تا مقدار تابع در نقطه (-1) معلوم باشد.

بنابراین لازم است که از رابطه شرط مرزی استفاده شود. رابطه مجزاسازی شرط مرزی حول نقطه (0) به‌صورت زیر است:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta x} \Rightarrow T_{-1} = T_1 - 2\Delta x \frac{dT}{dx}$$

$$\boxed{(2 + h'\Delta x^2)T_0 - 2T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty - 2\Delta x \frac{dT}{dx}}$$

تمرین سری ۴: حل معادلات دیفرانسیل معمولی



Numerical Methods for Engineers
Steven C. Chapra, Raymond P. Canale
ISBN: 978–0–07–340106–5
Publisher: McGraw-Hill
Pub. Date: 2010

تمرین‌های مشخص شده از کتاب فوق

شماره صفحه	شماره تمرین
750	25.1 , 25.7
750	25.16
751	25.18
777	26.8
805	27.4
806	27.23
806	27.24

- دو معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dv}{dt} = -v + sin(t)$$

$$v(0) = 1$$

$$\frac{dv}{dt} = -v$$

این معادلات را در محدوده زمانی $0<t<10$ به روش‌های زیر حل کنید.

- روش اولر
- روش اولر اصلاح شده
- روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ کلاسیک
- روش Adams-Moulton مرتبه چهار
- روش Milne

- سایر خواسته‌ها در ادامه نوشته شده است.

پروژه ۳: حل معادله دیفرانسیل معمولی

- برای هر معادله موارد زیر را گزارش کنید:
  - حل تحلیلی دقیق مساله را پیدا کنید.
  - برای هر کدام از روش‌ها با گام‌های زمانی مختلف حل را مقایسه کنید. نتایج را با حل تحلیلی مقایسه کنید. (نمودار تغییرات v-t رسم شود.)
  - در هر روش، مقدار گام زمانی بهینه که در آن نتایج مستقل از گام حل به‌دست می‌آید، چقدر است؟
  - مقدار خطا (اختلاف با حل تحلیلی) را مشخص کنید.
  - روش‌ها را از نظر زمان حل با هم مقایسه کنید.
  - برای هر روش مقدار بیشینه گام حل، که در آن روش پایدار (Stable) می‌شود را در محدوده زمانی حل تعیین کنید.
  - **در خصوص دقت و پایداری روش‌ها بحث کنید.**