Subject: Algebra Brife
Date:

«خلاصه ی جبر»

1) $|S|=n$; تعداد اعمال دوتایی روی S $=|S|^{|S\times S|}=n^{n^2}$; اعمال دوتایی آبلی $=n^{\frac{n^2+n}{2}}$ (با جدول)

2) شرایط زیر بر گروه G معادل اند

1) G is Abelian
2) $\forall a,b\in G: (ab)^2=a^2b^2$
3) $\forall a,b\in G: (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$
4) $\forall a,b\in G, \forall n\in \mathbb{Z}: (ab)^n=a^nb^n$
5) $\forall a,b\in G, \forall n\in\{k,k+1,k+2\}\ \forall k\in\mathbb{Z}: (ab)^n=a^nb^n$
6) $\forall a\in G: a^2=1$ / (6) $\exists \varphi: G\xrightarrow[x\mapsto x^{-1}]{iso} G$
7) $\forall a,b\in G: (ab)^3=a^3b^3, (ab)^5=a^5b^5$

3) اگر شرایط زیر برقرار باشند گروه آبلی است

1) $\forall a,b\in G: a^2b=ba^2=b$ (در نیم گروه)
2) $\forall a\in G: a^2=1$
3) G متناهی, $\forall a,b\in G: (ab)^3=a^3b^3$ & $3\nmid |G| \rightsquigarrow$ Abelian
4) $\forall a,b,c\in S: ab=ca \Rightarrow b=c$ (در نیم گروه)
5) $|G|\leq 5$
6) $\forall a\in G, a\neq 1; a^2\neq 1: \forall x,y\in G: (xy)^2=(yx)^2$
7) $\exists f: G\xrightarrow{mono} G, f(x)=x^3$
8) $|\mathrm{Inn}\,G|=1$
9) $|G|=p$
10) $|G|=p^2$
11) $G/Z(G)$ دوری
12) G/N دوری $(N\trianglelefteq G, N\leq Z(G))$
13) $\forall d\,|\,|G|$ حداکثر یک زیرگروه از مرتبه d باشد (دوری)
14) $|G|=p_1p_2$ و آبلی $\rightsquigarrow$ (G دوری)
15) G متناهی و دقیقا یک زیرگروه ماکسیمال دارد $\sim$ (دوری)

4) شرایط زیر بر گروه G معادل اند

1) $H\leq G$
2) $\forall a,b\in H: ab\in H, a^{-1}\in H$
3) $\forall a,b\in H: a^{-1}b\in H$
4) $H\subseteq G$ متناهی: $\forall a,b\in H: ab\in H$
5) $HH\subseteq H, H^{-1}\subseteq H$
6) $HH^{-1}\subseteq H$
7) $HH=H, H^{-1}=H$
8) $HH^{-1}=H$

Subject
Date

5) $H \trianglelefteq G$ ، $H \leq G$ در شرایط زیر نتیجه می‌دهد که ((معیارهای نرمال بودن))

1) $[G:H]=2$

2) هیچ زیرگروه دیگری با H هم‌مرتبه نباشد

3) $\forall x \in G,\ x^2 \in H$ (و G/H آبلی)

4) $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_i < p_{i+1}$ و $[G:H] = p_1$. ($\Rightarrow H \underset{\text{maximal}}{\trianglelefteq} G$)

5) $G' \subseteq H$

6) $H \lneq G$, $\forall x,y \in G-H : xy \in H$

7) $(aH)(bH) = abH$

$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m,n)\mathbb{Z}$ & $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m,n]\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z},+)$ نامتناهی زیرگروه ماکسیمال دارد

$(\mathbb{Q},+)$ زیرگروه ماکسیمال ندارد.

$(\mathbb{Q},+)$ ، $(\mathbb{Q}^*,\times)$ ، $(\mathbb{R},+)$ دوری نیستند

<< $H \leq G$, $[G:H] = P \rightsquigarrow H \underset{\text{Maximal}}{<} G$ & $M \trianglelefteq G$, $M \underset{\text{maximal}}{\triangleleft} G \Leftrightarrow \left|\frac{G}{M}\right| = P$ >>

$|G = \langle a \rangle| = n$

<< d بزرگترین مقسوم علیه n $\rightsquigarrow \langle a^d \rangle \underset{\text{maximal}}{\leq} G$ & if $\exists!\ H \underset{\text{maximal}}{\leq} G$ (متناهی) $\rightsquigarrow$ G دوری است >>

<< زیرگروه‌های G متناهی $(|H|,|K|) = 1 \rightsquigarrow H \cap K = \{1\}$ & $H,K \trianglelefteq G$, $H \cap K = \{1\} \rightsquigarrow \forall (m,n) \in (H,K) : mn = nm$ >>

<< $N \trianglelefteq G$ متناهی , $(|N|, |G/N|) = 1 \rightsquigarrow H \leq G, |H| \,\big|\, |N| \rightsquigarrow H \leq N$ & N تنها زیرگروه از مرتبه $|N|$ است. >>

<< G متناهی و آبلی , $(n,|G|) = 1 \rightsquigarrow \varphi(x) = x^n \in \mathrm{Aut}\,G$ & $\forall x \in G\ \exists y \in G,\ x = y^n$ >>

زندگی نامه ی : «گروه های دوری»   عمر مفید: 25 سال $G=\langle a \rangle$

1) پیش فرض ، $G=\langle a \rangle$ و متناهی if $o(a)<\infty \Rightarrow o(a)=n$; $H_d = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$

1) $(k,n)=1 \Leftrightarrow \langle a \rangle = \langle a^k \rangle$

2) تعداد مولدهای G بخصوص برابر $\varphi(n)$

3) زیرگروه های G : $\langle a^{n/k} \rangle$ که $k|n$ ، $|\langle a^{n/k} \rangle| = k$

4) تعداد زیرگروه های G برابر $\tau(n)$ می باشد

5) $H=\langle a^m \rangle \leq \langle a \rangle \Rightarrow$ کوچکترین عدد طبیعی که m ، $a^m \in H$

6) $H_{d_1} \subseteq H_{d_2} \Leftrightarrow d_1 | d_2$ اگر نامتناهی ، $H_m \subseteq H_n \Leftrightarrow n|m$
تنها دو مولد دارد

7) $\forall d|n$ ، $|\{x\in G \mid o(x)=d\}| = \varphi(d) = |\{x \in G \mid \langle x \rangle = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle = H_d\}|$

8) $\forall d|n$: $|\{x\in G \mid x^d = 1\}| = d$; $|\{x \in G \mid x^m = 1\}| = (m,n)$ حالت کلی

9) $\langle x^r \rangle \subseteq \langle x^s \rangle \Leftrightarrow (s,n) | (r,n)$

10) $\langle x^n \rangle \cap \langle x^m \rangle = \langle x^{[n,m]} \rangle$ بخصوص ، $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n,m]\mathbb{Z}$

11) $\langle x^n \rangle . \langle x^m \rangle = \langle x^{(n,m)} \rangle$ بخصوص ، $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z}$

12) $G \cong \mathbb{Z}_n$ & if نامتناهی $G \cong \mathbb{Z}$

13) d بزرگترین مقسوم علیه n $\Rightarrow$ زیرگروه ماکسیمال می باشد $\langle x^d \rangle \leq_{maximal} G$

14) اگر گروهی متناهی دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال داشته باشد دوری است

Date

$G = \langle a \rangle$ زندگی نامه ی : «گروه های دوری»

1) پیش فرض: $G = \langle a \rangle$ متناهی if $o(a) < \infty \to o(a) = n$; $H_d = \{\langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$

1) $(k,n) = 1 \iff \langle a \rangle = \langle a^k \rangle$

2) $\varphi(n)$ تعداد مولد های G بخصوص برابر $\varphi(n)$

3) زیرگروه های G: $\langle a^{n/k} \rangle$ که $k|n$, $|\langle a^{n/k} \rangle| = k$

4) تعداد زیرگروه های G برابر $\tau(n)$ می باشد

5) $H = \langle a^m \rangle \leq \langle a \rangle \to$ m کوچکترین عدد طبیعی که $a^m \in H$

6) $H_{d_1} \subseteq H_{d_2} \iff d_1 | d_2$ اگر نامتناهی: $H_m \subseteq H_n \iff n|m$
تنها دو مولد دارد

7) $\forall d|n$, $|\{x \in G \mid o(x) = d\}| = \varphi(d) = |\{x \in G \mid \langle x \rangle = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle = H_d\}|$

8) $\forall d|n$: $|\{x \in G \mid x^d = 1\}| = d$; $|\{x \in G \mid x^m = 1\}| = (m,n)$ حالت کلی

9) $\langle x^r \rangle \subseteq \langle x^s \rangle \iff (s,n) | (r,n)$

10) $\langle x^n \rangle \cap \langle x^m \rangle = \langle x^{[n,m]} \rangle$ بخصوص $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n,m]\mathbb{Z}$

11) $\langle x^n \rangle . \langle x^m \rangle = \langle x^{(n,m)} \rangle$ بخصوص $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z}$

12) $G \cong \mathbb{Z}_n$ & if نامتناهی $G \cong \mathbb{Z}$

13) $\langle x^d \rangle \leq_{maximal} G$ زیرگروه ماکسیمال می باشد $\Leftarrow$ d بزرگترین مقسوم علیه n

14) اگر گروهی متناهی دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال داشته باشد دوری است

همه چیز در مورد: «گروه های دوری» ختم ماجرا

15) $Aut\,G \cong U(\mathbb{Z}_n)$ بخصوص $\mathbb{Z}_n$ ، در نامتناهی $Aut\,G \cong \mathbb{Z}_2$

16) G, H دوری متناهی : $G \times H$ دوری $\Leftrightarrow (|G|, |H|) = 1$

17) گروه نامتناهی دوری است $\Leftrightarrow$ با هر زیرگروه واقعی خود ایزومورف باشد

اضافه (18) $\otimes$ if $|G| = \overset{\text{مثبت}}{nm}$, $(m,n) = 1 \rightsquigarrow G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ $\quad$ $o(a) = \infty$ $[\langle a \rangle : \langle a^m \rangle] = m$

(19) $\varphi \in Inn\,G \Leftrightarrow G = \langle \varphi(a) \rangle$ اتومورفیسم های دوری مولد می باشند و برعکس

(20) $|Inn\,G| = \varphi(n)$ (تعداد مولدهای G)

21) $|G| = n$ ، دلخواه d باشد $\forall d|n$ حداکثر یک زیرگروه از مرتبه ی d $\rightsquigarrow$ G دوری

22) $\forall d|n \;\; \exists!\, H \leq G \;, |H| = d$

23) $\forall H \leq G \quad f(H) = |H|$ $\quad f: H \to \mathbb{N}$ $\quad f$ یک به یک $\Leftrightarrow$ G دوری

24) G گروه آبلی . $|G| = pq \rightsquigarrow$ G دوری

25) K دوری $K \trianglelefteq G$ (کامل) $\rightsquigarrow K \subseteq Z(G)$

26) $|G| = p^2 \rightsquigarrow \langle G$ دوری $\rangle \vee \langle G \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p \rangle$

27) $\otimes$ اضافه $\quad$ به ازای هر $d|n$ در $\mathbb{Z}_n$ ، دقیقاً $\varphi(d)$ عضو از مرتبه ی d داریم

Subject

Date

«گذری پرفضایای جبر»

1) عضو همانی یکتاست

2) معکوس یکتاست

3) نیم گروهی که همانی است و معکوس را دارد گروه می باشد

4) نیم گروه متناهی که قوانین حذف برقرار باشد گروه است.

5) هر نیم گروه متناهی عضوی خودتوان دارد

6) $|G|=2k$ ، عضو خودتوان دارد

7) * $|G|=2k$ تعداد فردی عضو از مرتبه 2 دارد

8) نیم گروهی که به ازای a و b ها معادلات $ax=b$ ، $ya=b$ جواب دارد گروه است

9) گروهی که تعداد متناهی زیرگروه دارد، متناهی می باشد و برعکس

10) جدول هر گروه یک مربع لاتین می باشد

11) گروهی که هر عضوش خودتوان باشد آبلی است

12) $a^m=1 \rightsquigarrow o(a)|m$

13) $o(a^k)= {}^{k}/(o(a),k)$

14) $o(a)=o(a^{-1})=o(bab^{-1})$

15) $o(ab)=o(ba)$ $[(b^{-1}ab)^n=b^{-1}a^nb]$

16) $o(a) \mid |G|$

17) $o(a),o(b)<\infty \rightsquigarrow o(ab) \mid [o(a),o(b)]$

18) $o(a),o(b)<\infty , ab=ba , (o(a),o(b))=1$
$\Rightarrow o(ab)=o(a).o(b)$

19) $o(a)<\infty , o(b)=\infty , ab=ba \rightsquigarrow o(ab)=\infty$

20) * (مهم) در گروه: $b^{-1}ab=a^m \rightsquigarrow b^{-n}ab^n=a^{m^n}$

21) * $H\leq G , g\in G , o(g)=n , g^m\in H$
$,(m,n)=1 \Rightarrow g\in H$

22) $(m,n)=1 , o(x)=mn \Rightarrow \exists y,z\in G:$
$x=yz , yz=zy , o(y)=m , o(z)=n$

23) $a\in G$ تنها عضو از مرتبه‌ی n است $\Rightarrow a\in Z(G)$ ، $n=1\vee 2$

24) مونوئیدی که فقط یک عضو خودتوان دارد گروه است

25) * $\langle a^k\rangle=\langle a\rangle \iff (k,n)=1$; $|\langle a\rangle|=n$

26) مولدهای $\mathbb{Z}_n$ برابر $\langle a\rangle$ که $(a,n)=1$

27) تعداد مولدهای $\langle a\rangle$ مرتبه n مخصوص $\mathbb{Z}_n$ برابر $\varphi(n)$ می باشد

28) * $|\langle a\rangle|=n$ زیرگروه های آن: $\langle a^{\frac{n}{k}}\rangle$ که k مقسوم علیهی از n است و $|\langle a^{\frac{n}{k}}\rangle|=k$

29) تعداد زیرگروه های $\langle a\rangle$ (مرتبه n) برابر ح می باشد (مخصوص $\mathbb{Z}_n$) زیرگروه های $\mathbb{Z}_n$ ، $\langle\frac{n}{k}\rangle$

30) $H,K\leq G$: $H\cup K\leq G \iff H\subseteq K \vee K\subseteq H$

31) $H\cap K\leq G$

32) $HK\leq G \iff HK \subseteq KH$

33) $|H\cup K|=|H|+|K|-|H\cap K|$

34) $|HK|=\frac{|H|.|K|}{|H\cap K|}$

35) $\langle X\rangle=\bigcap_{X\subseteq H\leq G} H=\{x_1^{m_1}\cdots x_k^{m_k} \mid x_i\in X, m_i\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}\}$

36) $H\leq\langle a\rangle \Rightarrow H=\langle a^m\rangle$ ، m کوچکترین عدد طبیعی که $a^m\in H$

37) $\langle a\rangle$ نامتناهی ، $n|m \iff H_m\subseteq H_n$

38) $|\langle a\rangle|=n$: $d_1|d_2 \iff H_{d_1}\subseteq H_{d_2}$

39) متناهی $H\leq\langle a\rangle \rightsquigarrow |H| \mid |\langle a\rangle|$

40) $\langle a\rangle$ نامتناهی فقط دو مولد a و a^{-1} را دارد

41) * $|G|=|\langle a\rangle|=n$ ، برای هر مقسوم علیه n مثل d دقیقاً $\varphi(d)$ عضو از مرتبه‌ی d داریم
$|\{x\in G \mid o(x)=d\}|=\varphi(d)$ مولدهای H_d
$n=\sum_{d|n}\varphi(d)$

42) * $G=\langle a\rangle$ ، $|G|=n \Rightarrow \forall d|n , |\{x\in G \mid x^d=1\}|=d$
در حالت کلی $|\{x\in G \mid x^m=1\}|=(m,n)$

PAPCO

$H_d=\langle x^{\frac{n}{d}}\rangle$

گروه و زیرگروه و دوری ها

Subject
Date

43) هر جایگشت را می‌توان به صورت یک دور یا به صورت حاصلضرب دورهای ازهم جدا تجزیه کرد

44 *) اگر دورهای α و β عضو مشترکی نداشته باشند (ازهم جدا باشند): $\alpha\beta=\beta\alpha$ $(\alpha,\beta\in S_n)$

45) مرتبه‌ی یک جایگشت که به صورت حاصلضرب دورهای مجزا نوشته شده است برابر ک.م.م. طول دورهاست.

46) هر جایگشت در S_n را می‌توان به صورت حاصلضرب (نه لزوماً مجزا) دورهایی به طول دو (= ترانسپوزه) نوشت.

47) $\alpha=\beta_1\beta_2\cdots\beta_r$ و $\alpha=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$ که در آن β_iها و γ_iها ترانسپوز هستند $\Leftarrow$ s, r هر دو زوج یا هر دو فرد خواهند بود

48) $\alpha\in S_n$ یک k دور است $\iff o(\alpha)=k$; $(1\,2\,3\ldots n)^{-1}=(n\;\, n-1\ldots 2\;1)$

49) $\alpha=(i_1\, i_2\ldots i_k)\in S_n$: $\forall\beta\in S_n$, $\beta\alpha\beta^{-1}=(\beta(i_1)\,\beta(i_2)\ldots\beta(i_k))$ و طول‌های هر دور و مزدوجش برابر می‌باشند ۹ (عالی ۱)

50) $\alpha\in S_n$ یک k دور: α جایگشت زوج است $\iff$ k فرد باشد

51) $A_n\le S_n$:(جایگشت‌های زوج) ، $|A_n|=\frac{1}{2}n!$

52) هر عنصر A_n حاصلضربی از 3 دورهاست $(n\geq 3)$ و توسط دورهای سه‌تایی تولید می‌شود

53 *) تعداد دورهای متمایز از طول r در S_n برابر است با $\frac{n!}{r(n-r)!}=\binom{n}{r}(r-1)!$

54 *) $H\le S_n$ $(n>1)$ هر عضو H یک جایگشت زوج است یا دقیقاً نیمی از آن‌ها زوج است.

اگر σ دوری به طول n باشد و $m\mid n$ $\Leftarrow$ σ^m حاصلضرب m دور به طول $\frac{n}{m}$ است $[S_n:A_n]=2$

55) $G=\langle a\rangle$ مرتبه n: $G\cong\mathbb{Z}_n$ ، اگر G دوری نامتناهی باشد $G\cong\mathbb{Z}$

56) الف: $f:G\xrightarrow{homo}H$; f is mono $\iff$ $\ker f=\{e\}$ $(M\trianglelefteq H\xRightarrow{?} f^{-1}(M)\trianglelefteq G)$

ب) f is iso $\iff$ $\exists\, g: H\xrightarrow{homo}G$ ، $gf=1_G$, $fg=1_H$ $(g=f^{-1})$

57) $f:G\xrightarrow{iso}H$

الف) $\forall n\in\mathbb{Z}: f(a^n)=f(a)^n$

ب) G آبلی $\iff$ H آبلی

ج) $K\le G\Rightarrow f(K)\le H$

در Homo نیز برقرار است

د) G دوری $\iff$ H دوری

ه) $\forall a\in G$, $o(a)=o(f(a))$ و در Homo: $o(f(a))\mid o(a)$

58 *) $G=\langle a\rangle$ متناهی مرتبه n: $\mathrm{Aut}\,G\cong U(\mathbb{Z}_n)$ درنتیجه $|\mathrm{Aut}\,G|=\varphi(n)$ (بخصوص $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)\cong U(\mathbb{Z}_n)$)

59) $G=\langle a\rangle$ نامتناهی: $\mathrm{Aut}\,G\cong\mathbb{Z}_2$ درنتیجه $|\mathrm{Aut}\,G|=2$

60) کایلی: هر گروه با یک گروه از جایگشت‌ها ایزومورف است

61) $|G|=n$ با یک زیرگروه از S_n ایزومورف است.

62 *) $\alpha: G\to G$, $\alpha(g)=g^{-1}$: $\alpha\in\mathrm{Aut}\,G\iff$ G is Abelian Group

$\alpha(g)=g^2$: $\alpha\in\mathrm{Homo}\,G\iff$ 〃

PAPCO

Subject
Date

63*) یک گروه نامتناهی دوری است $\Longleftrightarrow$ با هر زیرگروه واقعی خود ایزومورف باشد

64) $G\cong H \Longrightarrow \mathrm{Inn}\,G\cong \mathrm{Inn}\,H\ ,\ \mathrm{Aut}\,G\cong \mathrm{Aut}\,H$

65) در حد ایزومورفیسم تنها دو گروه از مرتبه‌ی 4 و 6 وجود دارد

66) $a=(g_1,g_2,\dots,g_n)\in G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \rightsquigarrow o(x)=[o(g_1),o(g_2),\dots,o(g_n)]$

67*) H و G دوری متناهی: $G\times H$ دوری $\Longleftrightarrow$ $|G|$ و $|H|$ نسبت به هم اول باشند (تعمیم پذیر)

68) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \Longrightarrow \mathbb{Z}_n\cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}\times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}}\times\cdots\times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$

مثال) $\mathbb{Z}_2\times\underline{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3}\times\mathbb{Z}_5\cong \mathbb{Z}_2\times\underline{\mathbb{Z}_6}\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{30}$

69*) $G\times H$ آبلی $\Longleftrightarrow$ G, H آبلی

70) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2\cong\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}_6\ ;\ \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}_p\cong\mathbb{Z}_{p-1}\ ;\ \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)\cong(U(\mathbb{Z}_n),\cdot)$

* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\cong S_3$

71*) $|\mathrm{Inn}\,G|=1 \Longleftrightarrow$ G آبلی

72) $G=\langle a\rangle$ از مرتبه‌ی nm که n,m مثبت و متباین هستند $\Longrightarrow G\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$

73) $aH=bH \Leftrightarrow a\in bH \Leftrightarrow aH\cap bH\neq\emptyset \Leftrightarrow a\sim b \Leftrightarrow a^{-1}b\in H\ ;\ aH=bH$ یا $aH\cap bH=\emptyset$

لاگرانژ: $[G:H]=\frac{|G|}{|H|} \rightsquigarrow |G|=[G:H]|H| \rightsquigarrow [G:H]=$ تعداد همدسته‌های H $\qquad (H\leq)\ G=\dot{\bigcup}_{a_i\in G} Ha_i$

74) نتایج لاگرانژ:
1) $|H|\,\big|\,|G|$ 2) $o(a)\,\big|\,|G|$ 3) $a^{|G|}=1$
4) $|G|=p \rightsquigarrow$ G دوری

75) $C(a):=\{g^{-1}ag : g\in G\} \rightsquigarrow G=\bigcup_{a\in G} C(a) \rightsquigarrow |C(a)|=[G:\overset{\text{Centraliser}}{C_G(a)}]$

76) $|G|=\sum_{a\in G}|C(a)|=\sum_{a\in G}\frac{|G|}{|C_G(a)|}$

77*) معادله‌ی کلاس: $|C(a_i)|>1$: $|G|=|Z(G)|+\sum_{|C(a_i)|>1}[G:C_G(a_i)]$

78) $|C(a)|=1 \Leftrightarrow [G:C_G(a)]=1 \Leftrightarrow G=C_G(a) \Leftrightarrow a\in Z(G)$

79) $[G:K]=[G:H][H:K] \qquad |G|<\infty\ ,\ K\leq H\leq G$

PAPCO

ایزومورفیسم و همدسته‌ها و لاگرانژ

Subject

Date

80*) (اثبات نمایید) $|G|=p^n \rightsquigarrow |Z(G)| \overset{>1}{\geq} p$, $(p \mid |Z(G)|)$

81) $|G|=p^n \rightsquigarrow \exists a\in G : o(a)=p$ (اثبات با استفاده از: $o(a)=nm \rightsquigarrow o(a^m)=n$)

82*) G متناهی: $[G:Z(G)]$ نمی‌تواند عددی اول باشد ($[G:Z(G)]=[G:C_G(a)][C_G(a):Z(G)]$ $a\notin Z(G)$)

83) $|G|=p^2 \Rightarrow$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی p می‌باشد (در حالت $|G|=p^n$ نیز برقرار است)

84) $G=\langle a\rangle$ مرتبه n و $b\in G$ $(a^s=b)$ $\Rightarrow$ $\langle b\rangle \le G$; $|\langle b\rangle| = \frac{n}{(n,s)}$

if $ab\in N\trianglelefteq G \rightsquigarrow ba\in N$

85) $H\le G$ اگر H از اندیس 2 باشد (تعداد همدسته‌های راست (چپ) برابر 2 باشد) $\Rightarrow$ $H\trianglelefteq G$ (H, Ha)

86) $H\le G$ و هیچ زیرگروهی با H هم‌مرتبه نباشد $\Rightarrow$ $H\trianglelefteq G$ (اثبات: $|H|=|gHg^{-1}|$)

87)* $Z(G)\trianglelefteq G$ $\quad \ker f\trianglelefteq G : f: G\xrightarrow{homo} H$ $\quad \boxed{G/Z(G)\cong Inn(G)}$

88) $H,K\le G$ متناهی , $(|H|,|K|)=1 \rightsquigarrow H\cap K=\{1\}$ $\quad |Inn\, S_3|=6$ دوری

89) $|G|=n$ $\quad \forall d\mid n$ حداکثر یک زیرگروه از مرتبه d وجود داشته باشد $\Rightarrow$ G دوری

((مثال)) ← S_3 غیرآبلی ولی هر زیرگروه واقعی آن دوری است & $(\mathbb{Q},+)/(\mathbb{Z},+)$ نامتناهی ولی هر عضو آن از مرتبه‌ی متناهی

. Q_8 گروهی است غیرآبلی ولی هر زیرگروه آن نرمال است $\quad V_4=\{1,a,b,ab\} ; (a^2=b^2=1, ab=ba)$

V_4 گروهی است آبلی که هر زیرگروه آن نرمال است و V_4 دوری نیست ولی زیرگروه‌های واقعی آن دوری است

90*) $\langle a\rangle=G$: مرتبه n $\quad \forall d\mid n \ \exists!\, H\le G : |H|=d$

91*) f یک‌به‌یک $\iff$ G دوری : $\forall H\le G : f(H):=|H|$

92) $G=\langle a\rangle$ نامتناهی $\Rightarrow [G:\langle a^m\rangle]=m$; $|G|=pq$ و آبلی $\rightsquigarrow$ G دوری

93*) $H\le G$, $[G:H]=p \Rightarrow H \overset{maximal}{<} G$

94) $[G:H]<\infty \rightsquigarrow [K:H\cap K]=[G:H] \iff G=HK$

95) $H\le G$, $\forall x\in G : x^2\in H \rightsquigarrow H\trianglelefteq G$, G/H آبلی

96) $|G|=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_1<p_2<\cdots<p_k)$, $[G:H]=p_1 \rightsquigarrow H\trianglelefteq G$

97) $N\trianglelefteq G , H\le G \rightsquigarrow H\cap N\trianglelefteq G$; if $N\le H\le G , N\trianglelefteq G \rightsquigarrow N\trianglelefteq H$; $\langle H\cup N\rangle = HN$

98*) $M,N\trianglelefteq G$, $M\cap N=\{1\} \rightsquigarrow \forall m\in M , \forall n\in N , mn=nm$

99*) «Kauchi» G آبلی و متناهی و $p\mid |G|$ $\Rightarrow$ G دارای عضوی از مرتبه‌ی p می‌باشد

100) $G/Z(G)$ دوری $\Rightarrow$ G آبلی

101) $N\trianglelefteq G , N\subseteq Z(G)$: G/N دوری $\Rightarrow$ G آبلی

Subject

Date

(با استفاده از برساید و $G/_{Z(G)}$ دوری ⇐ G آبلی) (102

$|G|=p^2 \rightsquigarrow$ G آبلی ، مرکز آبلی (103

$|G|=p^3$ غیرآبلی $\longrightarrow |Z(G)|=p$ ($|G|=p^3$ آبلی $\rightsquigarrow |Z(G)|=p^2 \vee p^3$) (104

$\forall H\leq N \trianglelefteq G$ ؛ مشابه ($H\trianglelefteq G \Longleftarrow$ دوری N) (105*

G مشتق = G گروه جابجاگر $G'=\{xyx^{-1}y^{-1} : x,y\in G\}\trianglelefteq G$ & $G/_{G'}$ آبلی (106*

if $G/_N$ آبلی $\rightsquigarrow G'\subseteq N$; if $G'\leq H\leq G \rightsquigarrow H\trianglelefteq G$ (107

$Inn(G)\trianglelefteq Aut(G)$ $\quad Q_8' = \{\pm 1\}$ (108*

$Q_8/_{\{\pm1\}} \cong V_4$ $\quad (Z(Q_8)=\{\pm1\})$ $\quad Aut(Q_8)\cong V_4$ (109

$o(xN)\,|\,o(x)$; $Z(G\times H)=Z(G)\times Z(H)$ (110

«قضیه‌ی تناظر» $G,\ N\trianglelefteq G$ $\quad A:=\{H \mid N\subseteq H\leq G\}$ $\quad B:=\{L \mid L\leq \frac{G}{N}\}$

1) $f:A\longrightarrow B$; $f(H)=\frac{H}{N}$ (دوسویی)

2) $H_1,H_2\in A: H_1\subseteq H_2 \Longleftrightarrow \frac{H_1}{N}\subseteq\frac{H_2}{N}$

3) $H_1\subseteq H_2 \Rightarrow ([H_2:H_1]=[\frac{H_2}{N}:\frac{H_1}{N}])$

4) $H_1\trianglelefteq H_2 \Longleftrightarrow \frac{H_1}{N}\trianglelefteq\frac{H_2}{N}$

N تنها زیرگروه از مرتبه $|N|$ است

حالت خاص عکس لاگرانژ: $N\trianglelefteq G$ متناهی , $(|N|,|G/_N|)=1 \xRightarrow{\text{(الف)}}$ if $H\leq G$, $|H|\,|\,|N| \Rightarrow H\leq N$ (111*

قضیه اول هومومورفیسم ها: $\varphi: G\xrightarrow{Homo} H \Rightarrow G/_{Ker\varphi}\cong Im\varphi$ (112

$G/_G\cong\{1\}$ $\quad G/_{\{1\}}\cong G$ $\quad GL(2,\mathbb{R})/_{SL(2,\mathbb{R})}\cong\mathbb{R}^*$ $\quad \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_n$ (113

$S_n/_{A_n}\cong\{-1,1\}$ $\quad (n<k)\ \ \mathbb{Z}_k/_{n\mathbb{Z}_k}\cong\mathbb{Z}_n$ (عکس برقرار نیست)

قضیه‌ی دوم هومومورفیسم ها: $H,K\leq G,\ K\trianglelefteq G:\ \ H/_{H\cap K}\cong HK/_K$ (114

مثال: $4\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}}\cong 4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \rightsquigarrow 4\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}\cong 2\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$

قضیه‌ی سوم هومومورفیسم ها: $H\trianglelefteq K\trianglelefteq G,\ H\trianglelefteq G \rightsquigarrow K/_H\trianglelefteq G/_H$, $\frac{G/H}{K/H}\cong G/_K$ (115

مثال) $\frac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_2$ $\qquad \frac{\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_n$

$Aut(\mathbb{Z}_n)\cong(U(\mathbb{Z}_n),\cdot)$ $\quad Aut(V_4)\cong S_3$ $\quad Aut(S_3)\cong S_3$ $\quad V_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (116*

$Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\cong S_3$ $\quad Aut(Aut(Aut(\cdots(Aut\,\underset{V_4}{\overset{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}{S_3}})\cdots)))\cong S_3$

PAPCO

گروه‌های خارج قسمت و نرمال

Subject: H, K مزدوج: $\exists g\in G,\ H=gKg^{-1}$

Date

G کامل: $G'=G$ — البته شاید هم زیرگروه e ی نرمالش

G ساده: تنها زیرگروه‌های نرمالش {1} و G باشد

117* G گروه آبلی: ساده است ⟺ $|G|=p$

118) برای $n\geq 5$، A_n ساده است. و ساده هستند:

119* قضیه مهم: $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut\,H$ ایزومورف است

120* G کامل و $K\trianglelefteq G$ دوری → $K\subseteq Z(G)$ (اثبات با مهم)

121* G کامل است ← $|Z(G/Z(G))|=1$

122) الف) $\varphi(x)=x^n\in Aut\,G$ ب) $\forall x\in G\ \exists y\in G: x=y^n$ ⟸ $(n\in\mathbb{N})$، $(n,|G|)=1$ و G متناهی آبلی

123* $|G|=p^2 \to$ «G دوری» یا «$G\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$»

124) آبلی $|G|=p_1p_2$ → G دوری

125* if $G=D_{2n}$ → n فرد، $|Z(G)|=1$ & n زوج، $|Z(G)|=2$

126* تعداد مزدوج‌های H برابر است با $[G:N_G(H)]$

«Rings»

1) $x\in\mathbb{Z}_n$ مقسوم‌علیه صفر است ⟺ $(x,n)\neq 1$ — هر عضو $\mathbb{Z}_n$ یا مقسوم‌علیه صفر است و یا یکال است

2) $x\in\mathbb{Z}_n$ یکال است ⟺ $(x,n)=1$

3) $x\in\mathbb{Z}_n$ پوچ‌توان است ⟺ عامل‌های اول n در x ظاهر شده باشد (به شرطی که $n=p_1p_2\cdots p_k$ نباشد)

4) R حلقه‌ی جابجایی: a, b پوچ‌توان ⟸ a+b پوچ‌توان (به توان 4nm برسان)

5) R جابجایی ⟸ $\forall x: x^2-x\in Z(R)$ ؛ R جابجایی ← $\forall a\in R: a^3=a$ ($a^4=a$) ، R is Ring

6* (وجود عضو خودتوان ← وجود عضو پوچ‌توان) $(1-a)ba$ پوچ‌توان : $\forall b\in R$ ، $a\in R$ خودتوان

7) در حلقه‌ی $(R,+,\cdot)$ اگر $(R,+)$ دوری باشد ⟸ R جابجایی است

8) در $\mathbb{Z}_p$ مقسوم‌علیه صفر نداریم و تمام اعضا یکال اند و عضو پوچ‌توان نیز نداریم

9) مجموع دو عضو (یکال) با (پوچ‌توان) در حلقه‌ی جابجایی و یکدار، یکال است

10) R پوچ‌توان غیرصفر ندارد ⟺ $\forall a\in R\ (a^2=0 \Rightarrow a=0)$

11) R پوچ‌توان غیرصفر ندارد ⟸ هر عضو خودتوان در مرکز است

12) R بدون مقسوم‌علیه صفر ⟺ $\forall a,b\in R,\ ab=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$ ⟺ قانون حذف از راست (چپ) (عنصر غیرصفر حذف می‌شود)

مثال: $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ جابجایی و غیریکدار / $R=\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in n\mathbb{Z}\}$ حلقه غیرجابجایی و غیریکدار

PAPCO

گروه‌های ساده و کامل و مزدوج، ایزومورف ٪ حلقه‌ها، یکال و مقسوم‌علیه صفر و پوچ‌توان و خودتوان

به حلقه‌ای که هر عضوش خودتوان است حلقه‌ی بول گویند

Subject $IJ = \{x_1y_1 + \dots + x_ny_n \mid x_i \in I, y_i \in J, n \in N\}$

Date $P \underset{\text{اول}}{\trianglelefteq} R : P \neq R,\ \forall A, B \trianglelefteq R : AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \vee B \subseteq P$

یکدارات
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ حلقه‌ی جابجایی و یکدار / $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقه‌ی غیرجابجایی و یکدار / مجموعه توابع حقیقی با $+$ و $\times$ مجموعه‌ی حلقه جابجا و

13) در حلقه‌ی غیر بدیهی R که یکدار است، $1 \neq 0$ لذا اگر $a \in R$ یکال باشد، مقسوم علیه صفر نیست

14) تمام $n\mathbb{Z}$ ها زیر حلقه‌ای در $\mathbb{Z}$ هستند & $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib\}$ زیرحلقه‌ی $\mathbb{C}$ است & $Z(R)$ زیرحلقه‌ی R

15) S زیرحلقه‌ی R $\Longleftrightarrow$ الف) $\forall a, b \in S : a - b \in S$ ب) $\forall a, b \in S : ab \in S$

16) هر حوزه‌ی صحیح (حلقه‌ی تقسیم) متناهی یک میدان است / R حلقه‌ی متناهی بدون مقسوم علیه صفر یک میدان

مثال: $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_3[i]$ میدان هستند. $R = \{\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \mid \alpha_i \in R\}$ حلقه‌ی تقسیم $q^{-1} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{x} i - \frac{\alpha_2}{x} j - \frac{\alpha_3}{x} k$

17) * R مقسوم علیه صفر ندارد، مشخصه R صفر است یا P & مشخصه‌ی هر حوزه‌ی صحیح / میدان / حلقه تقسیم، ۰ یا P

18) R بول: $\operatorname{char} R = 2$ و R جابجایی است

19) * حلقه‌ی بولی R میدان است $\Longleftrightarrow$ $R = \{0, 1\}$

20) R میدان متناهی $\Longrightarrow$ $|R| = p^r$

21) میدانی با 6 عضو وجود ندارد

22) R حلقه‌ی متناهی که مقسوم علیه صفر ندارد $\Longrightarrow$ R حلقه‌ی تقسیم است. (میدان هم هست)

23) $\operatorname{char}(R \times S) = [\operatorname{char} R, \operatorname{char} S]$

24) هر میدان صرفاً دو ایده‌آل $\{0\}$، R را دارد. / در حلقه‌ی تقسیم نیز برقرار است.

25) حلقه‌ی یکداری که فقط دو ایده‌آل / ایده‌آل راست / چپ بدیهی را داشته باشد، حلقه‌ی تقسیم است.

26) * R حلقه‌ی ساده $\Longleftarrow$ $\operatorname{char} R = 0 \vee P$ مثال‌هایی از حلقه‌های ساده: میدان‌ها و حلقه‌های تقسیم.

27) اشتراک ایده‌ها ایده‌آل است و $I, J \trianglelefteq R,\ I \cup J \trianglelefteq R \Leftrightarrow I \subseteq J \vee J \subseteq I$

28) $a \in R,\ X \subseteq R \Rightarrow \langle a \rangle = \{ra + as + na + \sum_{i}^{m} r_i a s_i \mid r, s_i \in R, m \in N, n \in \mathbb{Z}\}$

if $a \in Z(R)$: $\langle a \rangle = \{ra + na \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$

if R یکدار: $\langle a \rangle = \{\sum_{i}^{m} r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R, m \in N\}$

if $a \in Z(R)$, R یکدار $\Rightarrow \langle a \rangle = aR = Ra$ ایده‌آل اصلی

29) ایده‌آل‌های $\frac{R}{I}$ به صورت $\frac{J}{I}$ است که $I \subseteq J \trianglelefteq R$ $(I \trianglelefteq R)$

30) * ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_n (\cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})$ به صورت $\frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ است که $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ $\Longrightarrow$ $m \mid n$

31) * تعداد ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_n$ برابر است با $\tau(n)$ (: تعداد مقسوم علیه‌های n)

32) P ایده‌آل اول است $\Longleftrightarrow$ $P \overset{\triangle}{\neq} R,\ (\forall a, b \in R : ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P)$

33) R جابجایی و $P \underset{\text{اول}}{\trianglelefteq} R$ $\Longrightarrow$ $\forall a, b \in R : ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

Subject ایده‌آل اصلی = $\langle a\rangle$ = aR , Ra
Date

(مثال) 34) ایده‌آل اول برای حوزه‌ها صحیح است / ایده‌آل‌های اول $\mathbb{Z}$: $\{0\}$, $P\mathbb{Z}$

حلقه R : $R^2 \subseteq R$ But یکدار R : $R^2 = R$

35*) R جابجایی و یکدار : $P \trianglelefteq_{اول} R \iff R/P$ حوزه‌ی صحیح باشد $\iff R-P$ بسته نسبت به ضرب باشد

36) $I \trianglelefteq \mathbb{Z} \iff I \le \mathbb{Z} \iff I = n\mathbb{Z} = \langle n\rangle , n\in W \iff (I,+) \le (\mathbb{Z},+)$

37) ایده‌آل بودن خاصیت تعدی ندارد ولی : $P \trianglelefteq_{Prime} I \trianglelefteq R \rightsquigarrow P \trianglelefteq R$

38 ②) $\forall x\in R : x^3 = x \rightsquigarrow$ R جابجاست / $\forall x\in R : x^2 - x \in Z(R) \rightsquigarrow$ R جابجاست

39*) $(\{0\} \trianglelefteq_{Prime} \mathbb{Z})$ $\langle m\rangle \trianglelefteq_{Prime} \mathbb{Z} \iff m\in\mathbb{P} \iff \langle m\rangle \trianglelefteq_{Maximal} \mathbb{Z}$

40) $I \trianglelefteq R ,\ \mathrm{char}\,R < \infty \rightsquigarrow \mathrm{char}(R/I) \mid \mathrm{char}\,R$

41) R حلقه‌ی تقسیم یا میدان ← $\{0\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال R است

42*) $M \trianglelefteq R$: $M \trianglelefteq_{Max} R \iff R/M$ حلقه‌ی ساده (هر حلقه‌ی ساده لزوماً حلقه‌ی تقسیم نیست (×))

43↓) R یکدار ⟸ $Max(R) \neq \emptyset$ (هر ایده‌آل واقعی R در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد)

44*) R جابجایی و $R^2 = R$: $M \trianglelefteq_{Max} R \longrightarrow M \trianglelefteq_{Prime} R$

45) در حلقه‌های جابجایی و یکدار هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است

46*) $M \trianglelefteq R$ ، R یکدار و $1_R \neq 0$: جابجایی $M \trianglelefteq R$ ، R/M میدان $\iff$ (1) $M \trianglelefteq_{Max} R$ (2) $\forall x\in R\ (x^2\in M \Rightarrow x\in M)$

الف) $M \trianglelefteq_{Max} R$ و R جابجا ← R/M میدان

ب) R/M حلقه‌ی تقسیم ← M ماکسیمال

47) $I, J \trianglelefteq R$: $IJ \subseteq I\cap J$ & $IJ \trianglelefteq R$ & $I+J = \langle I\cup J\rangle \trianglelefteq R$

48) R جابجا و یکدار و متناهی ← هر ایده‌آل اول ماکسیمال است

49) R جابجایی و یکدار و متناهی ← ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال معادل اند ($\mathbb{Z}_n$ ها)

50) R حلقه‌ی تقسیم یا میدان ← تنها ایده‌آل اول و ماکسیمال = $\{0\}$

51) R حلقه‌ی بولی (در حلقه‌ها بولی $R^2 = R$) ← ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال اند

52↑) R متناهی مولد باشد ← هر ایده‌آل واقعی R در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد ($Max(R) \neq \emptyset$)

53) $S \subseteq R$ بسته ضربی ، $\emptyset \neq X = \{I \mid I \trianglelefteq R , I\cap S = \emptyset\}$ ، $(X, \subseteq)$ دارای عضو ماکزیمال است و عضو ماکسیمال ایده‌آل اول است

54) $M_1, M_2 \trianglelefteq_{Max} R \rightsquigarrow M_1M_2 = M_1\cap M_2$

55) R جابجا ، N همه پوچتوان‌های R ← $N \trianglelefteq R$ و R/N پوچتوان غیر صفر ندارد.

56) R جابجا و یکدار ، $M(\neq R)$ در R ماکزیمال است $\iff \forall r\in R-M\ \exists x\in R : 1_R - rx \in M$

P4PCO

R حلقه‌ی موضعی هرگاه: فقط یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد

R جابجایی : $\langle x\rangle\langle y\rangle \subseteq \langle xy\rangle$

Subject: تعمیر

Date: تفنوخار

~~$\forall x\in R-M: M+\langle x\rangle = R$~~

57) R جابجایی و یکدار ، $M \underset{\neq}{\lhd} R$

$$\forall I\trianglelefteq R: (I\subseteq M \vee I+M=R) \Longleftrightarrow M \underset{Max}{\lhd} R$$

58) R حوزه‌ی صحیح ؛ $a,b\in R$ ، $(m,n)=1$ ، $a^n=b^n$ ، $a^m=b^m \Rightarrow a=b$

59) $P\lhd R$: $P \underset{Prime}{\lhd} R \Longleftrightarrow \forall r,s\in R, (rRs\subseteq P \Rightarrow r\in P \vee s\in P) \Longleftrightarrow \langle r\rangle\langle s\rangle \subseteq P \Rightarrow r\in P \vee s\in P$ (ایده‌آل‌های اصلی)

$\Longleftrightarrow$ U و V ایده‌آل‌های راست (چپ) R ، $UV\subseteq P \Rightarrow U\subseteq P \vee V\subseteq P$

(60* R جابجایی و یکدار ، مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر R به انضمام صفر شامل حداقل یک ایده‌آل اول است (ایده‌آل اول‌ها)

61) $P_i \underset{Prime}{\lhd} R$ ، $(i=1,\dots,n)$ ، $A\trianglelefteq R$ و $A\subseteq \bigcup_{i}^{n} P_i \Rightarrow \exists i: A\subseteq P_i$

62*) در $\mathbb{Z}_n$ ، $n\neq p$ و d بزرگترین مقسوم علیه n است ، $\dfrac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ایده‌آل اول و ماکزیمال می‌باشد

63) $\varphi: R\to S$: $R/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ / $I\trianglelefteq R, S\le R$: $\dfrac{I+S}{I}\cong \dfrac{S}{S\cap I}$ / $\dfrac{R/I}{J/I}\cong R/J$ ، $I,J\trianglelefteq R$ ، $I\subseteq J$

64) $\varphi: \mathbb{R}\xrightarrow[Ring]{homo}\mathbb{R} \Rightarrow \varphi=0 \vee \varphi=I$ / $\varphi: \mathbb{C}\xrightarrow[Ring]{homo}\mathbb{C} \Rightarrow \varphi=0\vee\varphi=I\vee \varphi(z)=\bar{z}$

65) $\mathbb{Z}_n$ موضعی $\Longleftrightarrow 1<n=p^r$

66) R موضعی $\Longleftrightarrow \forall r,s\in R: (1=r+s \Rightarrow r\in U(R) \vee s\in U(R))$ (مفروض: $R\neq\{0\}$ ، ج.و)

67*) R موضعی $\Longleftrightarrow R-U(R)\trianglelefteq R$ عناصر غیریکال

68) R موضعی $\Longrightarrow \operatorname{Char} R = 0 \vee p^r$

69*) $R\neq\{0\}$ جابجایی و یکدار و هر ایده‌آل واقعی آن اول است $\Leftarrow$ R میدان است

70 ح) R حلقه‌ی بدون مقسوم علیه صفر است که هر زیرحلقه‌ی آن ایده‌آل است $\Leftarrow$ R جابجایی است

71) R جابجایی و یکدار ، $\forall x\ \exists n>1: x^n=x \Rightarrow Max(R)=Spec(R)$ (اول‌ها و ماکزیمال‌ها برابرند)

72) F میدان : $\emptyset\neq K\subseteq F$: K زیرمیدان $\Longleftrightarrow \forall a,b\in K: a-b\in K \ \&\ (b\neq 0)\ (ab^{-1})\in K$

73) هر میدانی دارای زیرمیدانی ایزومورف با $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Z}_p$ می‌باشد (به این زیرمیدان کوچکترین زیرمیدان / زیرمیدان اول F می‌گویند)

74) A حوزه‌ی صحیح که A را می‌توان در یک میدان نشاند (A با زیرمیدانی ایزومورف است)

75*) R جابجایی و یکدار و $1_R\neq 0$ ، گزاره‌های زیر معادل‌اند

1) R میدان 2) R ساده

3) هر همومورفیسم غیرصفر از R به S یک مونومورفیسم است 4) $\{0\} \underset{Max}{\lhd} R$

PAPCO

ایده‌آل‌های اول و ماکزیمال و حلقه‌های موضعی ، میدان

Subject

Date

76) $I, J \trianglelefteq R,\ I+J=R \rightsquigarrow R/_{I\cap J} \cong R/_I \oplus R/_J$

77) $I, J \trianglelefteq R,\ I\cap J=\{0\},\ I+J=R \rightsquigarrow R/_I \cong J \ \&\ R \cong I\oplus J$

78) $\varphi: R \xrightarrow{epi} S$

الف) اگر J ایده‌آل اول (ماکسیمال) در S باشد آنگاه $\varphi^{-1}(J)$ نیز یک ایده‌آل اول (ماکسیمال) در R است

ب) اگر I که شامل $\ker\varphi$ است در R اول (ماکسیمال) باشد آنگاه $\varphi(I)$ نیز یک ایده‌آل اول (ماکسیمال) در S است

79) هر مقسوم علیه صفر $\mathbb{Z}_n$ پوچتوان است

مثال

$M_n(\mathbb{Q})$ حلقه‌ی ساده است (حلقه‌ی تقسیم)

80) F میدان متناهی با $\operatorname{char} F = P$ ، $|F| = P^n$ و $\forall x \in F: x^{P^n} = x$

«Algebra»

Subject
Date

1) نحوه‌ی پیدا کردن اعضای S_n ها (از مرتبه ...) مثال S_5 : $5 \to 6$, $4+1 \to [1,4] = 4$, $3+2 \to [3,2] = 6$ ....

2) $|G'| = n \Rightarrow |C(a)| < n$: $S_3 = \langle (12)(13) \rangle = \langle (12),(13),(23) \rangle = \langle (12),(123) \rangle$

3) G متناهی با n کلاس تزویج $\Rightarrow |\{(a,b) \in G \times G \mid ab = ba\}| = n|G|$

4) $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ گروه $\Leftrightarrow$ ~~...~~ A شامل $U(\mathbb{Z}_n)$ باشد «لایا» بسته باشد

5) هر جایگشت را می‌توان حاصلضرب ترانهش‌ها نوشت ، $(12)(34)$, $(123)(314)$; $(abc) = (acb)^2$

6) $|\{H \mid H < D_8\}| = 9$

7) $G = \langle a \rangle$ متناهی $\langle a^n \rangle \cap \langle a^m \rangle = \langle a^{[n,m]} \rangle$

8) $\alpha, \beta \in S_n$ مزدوج اند $\Longleftrightarrow$ حاصلضرب دورهای ازهم جدا باشند که مرتبه دورها برابرند

9) $[G:H] = n$, $[G:K] = m$: $G = HK \Leftrightarrow [G:K][G:H] = [G:H \cap K]$ $(\leq nm)$

10) $[G:H] = n$, $[G:K] = m$, $(m,n) = 1 \Rightarrow G = HK$

11) $D_8 = \{1, a, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3\}$, $ab = b^{-1}a$, $a^2 = 1$, $b^4 = 1$ (عناصر مرتبه دو)

12) $(H \lneq G)$ G در H بسته : $H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg \trianglelefteq G$; if $[G:H] < \infty \Rightarrow \exists N \trianglelefteq G : N \subseteq H$, $[G:N] < \infty$

13) دوری ها در G نرمال هستند $\Rightarrow \forall H \leq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

S_4 دارای زیرگروه نرمال از اندیس ۲ است (A_4) و دارای گروهی از اندیس 3 است (D_8) و اندیس 4 (S_3) ولی نرمال نیستند

P4PCO

S_4 دارای عناصر مرتبه ۲، ۳، ۴ است

Subject
Date

$d_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ ⟸ پریش n شیء (هیچ یک جای خود نباشد) $Z(S_3) = \{e\}$

14) $(p^n - 1)$ تعداد زیرگروه‌های مرتبه p ی $\overbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p}^{n}$ برابر است با

15) G دوری $\Leftrightarrow$ G متناهی و دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال دارد

16) $|G = \langle a \rangle| < \infty \rightarrow$ G دارای زیرگروه ماکسیمال A توسط عنوان $d \mid o(a)$، $d \neq o(a)$ ~ $\forall$ $\operatorname{Max}\{d\} = k$ مرتبه‌ی k تولید می‌شود و

17) می‌خواهیم تعداد Homo های از A به B را بیابیم باید خواص (1) $\varphi(1)$ و (2) $o(\varphi(1))$ را بررسی کنیم
مثال) $\mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30}$ 1) $0 = \varphi(0) = \varphi(20) = 20\varphi(1) \rightsquigarrow o(\varphi(1)) \mid 20 \rightarrow \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27\} \subseteq \mathbb{Z}_{30}$
2) $30\varphi(1) = 0$ $o(n) \mid 20$

18) $G = \langle a \rangle$ $|a| = n$ $\langle a^r \rangle \leq \langle a^s \rangle \Leftrightarrow (s,n) \mid (r,n)$

19) S_n در k تعداد دورهای به طول k = $\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$ = $\frac{n!}{(n-k)!\,k}$

20) برای بررسی دوری بودن $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ کافیست ببینیم عضوی از مرتبه‌ی $\varphi(n)$ وجود دارد یا نه

21) تمام زیرگروه‌های سره‌ی A_4 دارای مرتبه 1، 2، 3 هستند که همگی آبلی هستند

22) $|G| = n$ $|H| = m$ $(m,n) = 1 \rightsquigarrow$ تمام همریختی بین G، H، بدیهی است

23) $G = \langle a \rangle$، $o(a) = n \rightsquigarrow \varphi \in \operatorname{Inn} G \Leftrightarrow \langle \varphi(a) \rangle = G$ ~~$|$~~ $|\operatorname{Inn} G| = \varphi(n)$ تعداد مولدهای G !؟
اگر در آبلی‌ها $|\operatorname{Inn} G| = 1$

24) آبلی: تعداد گروه‌های هم مرتبه با G در حد ایزومورفیسم برابر $\prod_{i=1}^{k} L(\alpha_i)$ ، $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$
$L(\alpha_i)$: تعداد افرازهای α_i $L(5) = 7$ $5 = \{(1,1,1,1,1), (2,1,1,1), (3,1,1), (4,1), (2,2,1), (2,3), (5)\}$ ترتیب مهم نیست

$U(\mathbb{Z}_{16}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$
$\not\cong \mathbb{Z}_8$
$\not\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

برای این که بدانیم دو گروه iso هستند می‌توانیم مرتبه‌ی اعضا را چک کنیم
$M \trianglelefteq G$ ، $M \underset{max}{\trianglelefteq} G \Leftrightarrow \left|\frac{G}{M}\right| = p$

PAPCO

Subject
Date

25) $A, B \trianglelefteq G$ متناهی ، $(|A|, |B|) = 1 \rightarrow A \cap B = \{e\}, \forall a \in A\ \forall b \in B : ab = ba$

26) S_3 دارای 6 زیرگروه می‌باشد: $\langle 1 \rangle$ ، $\langle 12 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 23 \rangle$ ، $\langle 123 \rangle$ ، S_3 که همهٔ زیرگروه‌های سره‌اش دوری و آبلی هستند

27) $o(a), o(b) < \infty \not\Rightarrow o(ab) < \infty \quad E: GL(2, \mathbb{R})$ ، $o\left(A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\right) < \infty$ ، $o\left(B = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}\right) < \infty$ ، $o(A \times B) = \infty$

28) $A_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$ سه‌تایی‌ها (a, b, c) {که تعداد 8 تا}

29) $(\mathbb{Q}, +)$ دوری نیست ولی هر زیرگروه با تولید متناهی‌اش دوری است + زیرگروه ماکسیمال ندارد.

30) $|Aut(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)| = 3^4 - 3^3 - 3^2 + 3$ & $|Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)| = 2^4 - 2^3 - 2^2 + 2 \cong S_3$

31) $\dfrac{A \times B}{C \times D} \cong \dfrac{A}{C} \times \dfrac{B}{D}$

32) $G^2 \leq H \leq G' \rightarrow H \trianglelefteq G'$ ، $\dfrac{G'}{H}$ آبلی $(G'' \leq G' \cap Z(G) \leq G')$

33) اگر گروهی آبلی باشد زیرگروه‌های خارج قسمت آن نیز آبلی می‌باشد

«میدان کسرها»

R حوزهٔ صحیح $\Leftarrow$ روی $(r,s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' = sr'$ ، $R \times (R - \{0\})$ هم‌ارزی است
که کلاس هم‌ارزی (r, s) را با r/s نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $F := \{r/s \mid r \in R, s \in R - \{0\}\}$
در این صورت F با جمع و ضرب زیر یک میدان می‌شود که به آن میدان کسرهای R می‌گویند

$r/s + r'/s' = (rs' + sr')/ss'$ & $(r/s)(r'/s') = (rr'/ss')$

میدان کسرهای حلقهٔ $R[x_1, \dots, x_n]$ را با $R(x_1, \dots, x_n)$ نشان می‌دهیم = میدان توابع گویا از n متغیر با ضرایب در R

R حوزهٔ صحیح $R - \{0\} \xrightarrow{\varphi} R$ یک تک‌ریختی است (هر حوزهٔ صحیح قابل نشاندن در میدان کسرهای خود است)
$r \longmapsto r/1$

P4PCO

Subject

Date

Rings

1) Q_8 ، $(a+ib+jc+kd)^{-1} = (a-b)/x\; i - \frac{c}{x} j - \frac{k}{x} d$, $x = a^2+b^2+c^2+d^2$

2) در حلقه‌ی R $(|R|=n)$ اگر n اول باشد، R جابجایی است

3) $R \cong \mathbb{Z}_n \vee R \cong \mathbb{Z}$ ⇐ R یکدار غیر بدیهی که هر زیرحلقه‌ی آن ایده‌آل باشد

4) هر همریختی حلقه‌ای $\mathbb{Z}$ همریختی صفر یا همانی است

5) $f: R \xrightarrow{hom} S$, f پوشا ⇐ $f(1_R) = 1_S$

6) در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_n$ ایده‌آل های اول و ماکسیمال معادل اند
if $n=P \rightsquigarrow \exists! \{0\} \underset{maximal}{\overset{prime}{\trianglelefteq}} \mathbb{Z}_n$
else if $n \neq P$, d = max divisor of n ، $\frac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \underset{maximal}{\overset{prime}{\trianglelefteq}} \mathbb{Z}_n$

7) در حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ ایده‌آل های ماکسیمال فقط $P\mathbb{Z}$ ها هستند در حالیکه $\{0\}$ اول است و ماکسیمال نیست

8) ایده‌آل های اول و ماکسیمال معادل اند ⇐ $F[x]$ حوزه‌ی ایده‌آل اصلی ⇐ F میدان

$P_1, P_2 \trianglelefteq R \rightsquigarrow P_1 P_2 \subseteq P_1 \cap P_2$ & if $P_1 \cap P_2$ اول $\rightsquigarrow P_1 \subseteq P_2 \vee P_2 \subseteq P_1$

F میدان ⇐ $F[x]$ یک PID و حوزه‌ی صحیح می باشد (فاقد پوچ توان) ؛ R حلقه

جابجایی ⇐ $R[x]$ جابجایی

حوزه‌ی صحیح ⇐ $R[x]$ حوزه‌ی صحیح

~~[illegible]~~ نوتری ⇐ $R[x]$ نوتری

R حلقه‌ی جابجایی و یکدار: R میدان ⇔ $R[x]$ حوزه‌ی اقلیدسی ⇔ $R[x]$ یک PID

$P(x) \in F[x]$: $P(x)$ تحویل ناپذیر ⇔ $F[x]/\langle P(x) \rangle$ حوزه‌ی صحیح ⇔ $F[x]/\langle P(x) \rangle$ میدان

Algebra

Subject: Date: / /

هر حلقه‌ای که بدون مقسوم‌علیه صفر باشد مشخصه‌ی آن ۰ یا عددی اول می‌باشد 1

$I,J \trianglelefteq R$ ، $IJ := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i\in I,\ y_i\in J,\ n\in\mathbb{N}\} \trianglelefteq R$ ، $IJ \subseteq I\cap J$ 2

$I\cup J \subseteq I+J := \{x+y \mid x\in I,\ y\in J\}\ (\trianglelefteq R) = \langle I\cup J\rangle$

$P \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ is Prime $\Longleftrightarrow \forall A,B \trianglelefteq R,\ AB\subseteq P \Rightarrow A\subseteq P \vee B\subseteq P$ Prime Ideal

$P \underset{\neq}{\trianglelefteq} R;\ (\forall a,b\in R,\ ab\in P \Rightarrow a\in P \vee b\in P) \overset{\text{اگر جابجایی } R}{\Longleftarrow}\!\Longrightarrow$ P اول 3

$P \underset{Prime}{\trianglelefteq} R \Longleftrightarrow \frac{R}{P}$ حوزه‌ی صحیح ، R جابجایی، یکدار $(1\neq 0)$ 4

$\forall I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R\ \exists M \underset{max}{\trianglelefteq} R,\ I\subset M \Leftarrow 1\neq 0$ ؛ R 5

R جابجایی، $R^2 = R$ / R جابجایی و یکدار $\Longrightarrow$ Maximal $\subseteq$ Prime 6

M ماکسیمال $\Longleftrightarrow \frac{R}{M}$ میدان ، R یکدار $(1\neq 0)$ و جابجایی 7

M ماکسیمال $\Longleftarrow \frac{R}{M}$ حلقه تقسیم ، R یکدار $(1\neq 0)$ 8

Prime = Maximal $\Longleftarrow$ R جابجایی و یکدار و متناهی 9

$\forall x\in R-M\ \exists y\in R,\ 1_R - xy\in M \Longleftrightarrow M \underset{max}{\trianglelefteq} R \Leftarrow M \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ ج.ی 10

$\varphi: R \xrightarrow{homo} S,\ I \underset{Prime}{\trianglelefteq} S \Rightarrow \varphi^{-1}(I) \underset{Prime}{\trianglelefteq} R$ 11

R جابجا و یکدار: $a,b\in R$ وابسته $\Longleftrightarrow a = b\underset{\text{یکال}}{u}$ شریک

$a\sim b$

◁ تحویل ناپذیر

R جابجا-یکدار: $q\in R$ تحویل ناپذیر $\Longleftrightarrow$ $0\neq q$ ، غیریکال
$q=ab \Longrightarrow a$ یکال $\vee$ b یکال

◁ اول

R جابجایی: $p\in R$ اول $\Longleftrightarrow$ $0\neq p$ غیریکال
$p\mid ab \Longrightarrow p\mid a \vee p\mid b$

◁ 12

R حوزه‌ی صحیح : اعضای اول، تحویل ناپذیرند

◁ 13

R یک P.I.D : اعضای تحویل ناپذیر اولند

◁ 14

R حلقه‌ی ایده‌آل اصلی باشد $\Longleftarrow$ R نوتری

◁ 15

R حوزه صحیح و $0\neq p\in R$

p اول $\Longleftrightarrow$ $0\neq \langle p\rangle \trianglelefteq_{Prime} R$

p تحویل ناپذیر $\Longleftrightarrow$ $\langle p\rangle$ در ایده‌آل‌های اصلی ماکسیمال باشد

◁ 16

شریک تحویل ناپذیر، تحویل ناپذیر است
مقسوم علیه‌های یک $a\in R$: (صرفاً) شریک‌های a و یکال‌ها

◁ 17

R یک P.I.D

p تحویل ناپذیر/اول $\Longleftrightarrow$ $\langle p\rangle \trianglelefteq R$ اول است
ماکسیمال

$\forall\, 0\neq a\in R$ ناپکال $\exists$ p اول (تحویل ناپذیر) ، $p\mid a$

◁ U.F.D

حوزه‌ی صحیح R را U.F.D گویند هرگاه: $0\neq a\in R$ ناپکال به صورت حاصلضرب تعداد متناهی عضو تحویل ناپذیر، با تقریب ترتیب و شریک، منحصر به فرد باشند

$(a=p_1\cdots p_n=q_1\cdots q_m \Longrightarrow n=m \ , \ p_i\sim q_{\sigma(i)})$

Subject: Date: / /

18 - R یک P.I.D است هر ایده‌آل واقعی R به صورت حاصلضرب متناهی ایده‌آل اول است
ماکسیمال

19 - R یک U.F.D : نایکال $p \neq 0$، $p \in R$ اول است $\Longleftrightarrow$ p تحویل ناپذیر است

توسیع های جبری

میدان اول - میدانی که هیچ زیرمیدان سره نداشته باشد

1 - F میدانی با مشخصه صفر $\Longleftarrow$ F شامل زیرمیدانی مثل k است که $k \cong \mathbb{Q}$ (زیرمیدان اول)
با مشخصه $p > 0$ $\Longleftarrow$ F شامل زیرمیدانی مثل k است که $k \cong \mathbb{Z}_p$

2 - $k \subseteq F$ (زیرمیدان) : k زیرمیدانی اول $\Longleftrightarrow$ k اشتراک تمامی زیرمیدان‌های F است

توسیع میدان - $k \subseteq F$ (زیرمیدان) $\Longleftarrow$ میدان F را یک توسیع k نامند و آن را با F/k نمایش می‌دهند

مولد و تولید شده - $C \subseteq F$ (زیرمجموعه، میدان)، F/k یک توسیع میدان، $k(C)$ (مولد) را اشتراک تمام زیرمیدان‌هایی
F شامل $k \cup C$ تعریف می‌کنیم $\Longleftarrow$ $k(C)$ را زیرمیدان (F) تولید شده توسط C روی k می‌نامیم

- $k(C) =$ اشتراک تمام زیرمیدانهایی که شامل $k[C]$ هستند
چون $k[C]$ حوزه صحیح است، $k(C)$ مجموعه تمام عبارتهای کسری از عناصر $k(C)$ است
$k(C)$ میدان کسرهای $k(C)$ است $k(C) = \{ab^{-1} \mid a, b \in k[C], b \neq 0\}$

عنصر جبری و متعالی - F/k توسیع میدان؛ $a \in F$ را روی k، جبری گوییم هرگاه
$\exists k_0, \ldots, k_n \in k$ (که همه صفر نیستند) ، $k_0 + k_1 a + \ldots + k_n a^n = 0$
در غیر این صورت a را روی k متعالی نامند

- $a \in F$ روی k جبری است $\Longleftrightarrow$ a ریشه یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب از k باشد

3 ◁ $c\in F$ روی K جبری است $\Leftrightarrow$ c ریشه چندجمله‌ای کمین تحویل‌ناپذیر یکتا $p(x)$ روی K باشد!

چندجمله‌ای کمین c روی K — درجه c روی K = degree $p(x)$

4 ◁ $c\in F$ روی K جبری باشد $\Rightarrow$ چندجمله‌ای کمین تحویل‌ناپذیر یکتا $p(x)$ روی K موجود است که $p(c)=0$ و داریم:

◁ هیچ چندجمله‌ای غیرصفر $g(x)\in K[x]$ از درجه کوچکتر از $p(x)$ وجود ندارد که $g(c)=0$ (نماد: چندجمله‌ای کمین c روی K)

◁ اگر c ریشه $g(x)\in K[x]$ باشد $\Rightarrow$ در $K[x]$: $p(x)\,|\,g(x)$

5 ◁ $c\in F$ روی K متعالی $\Rightarrow$ $K(c)\cong K(x)$ (که $K(x)$ میدان کسرهای $K[x]$)

◁ جبری $\Rightarrow$ $K[c]\cong \frac{K[x]}{\langle p(x)\rangle}$ (که $p(x)$ چندجمله‌ای کمین c روی K)

6 ◁ F/K توسیع میدان، $c\in F$ ◁ $K[c]\subsetneq K(c)$ $\Leftrightarrow$ c روی K متعالی

$K[c]=K(c)$ $\Leftrightarrow$ c روی K جبری

dim v deg ◁ بعد فضای برداری F روی K را درجه F/K نامند و با $[F:K]$ نشان دهند

7 ◁ F/K : $c\in F$ روی K جبری و $p(x)$ کمین c روی K و $\deg p(x)=n$ $\Rightarrow$ $\{1,c,\dots,c^{n-1}\}\subseteq K(c)/K$ base

8 ◁ F/K توسیع متناهی میدان $\Rightarrow$ هر عضو F روی K جبری است

9 ◁ $K(c)/K$ توسیع متناهی باشد $\Leftrightarrow$ c روی K جبری باشد

توسیع جبری و متعالی ◁ توسیع F/K را جبری نامند هرگاه تمام اعضای F روی K جبری باشد، در غیر اینصورت F/K را متعالی نامند

K-همریختی ◁ F/K ، L/K توسیع و $\sigma: L\to F$ را همریختی گویند اگر $\forall a\in K: \sigma(a)=a$ $\Rightarrow$ به σ یک K همریختی گویند

10 ◁ F/K توسیع جبری و $\sigma: F\to F$ یک K همریختی $\Rightarrow$ σ یک خودریختی است

Subject: Comutative algebra

پیش فرض: حلقه‌ها جابجایی و یکدار

Date: / /

$\mathbb{P} \trianglelefteq R$ is Prime if $\mathbb{P} \neq (1)$ & if $xy \in \mathbb{P} \rightsquigarrow x \in \mathbb{P} \vee y \in \mathbb{P}$

$M \trianglelefteq R$ is Maximal if $M \neq (1)$ & if $M \subseteq K \subseteq R \rightsquigarrow M = K \vee R = K$

① $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ is Prime $\iff \frac{R}{\mathbb{P}}$ is integral domain

② $\Rightarrow$ M is Maximal $\iff \frac{R}{M}$ is a field

obvious $\Rightarrow$ Maximal $\subseteq$ Prime & 0 is Prime $\iff R$ is Integral domain

③ $\Rightarrow$ $f : A \xrightarrow{\text{homo}} B \trianglerighteq^{\text{Prime}} \mathbb{P} \rightsquigarrow f^{-1}(\mathbb{P}) \trianglelefteq^{\text{Prime}} A$

(not necessarily for maximal)

$\bar{f} : A/f^{-1}(\mathbb{P}) \xrightarrow{\text{iso}} B/\mathbb{P}$ (No zero divisor)

④ $\Rightarrow$ $\forall R_{\neq 0} \ \exists M \trianglelefteq^{\text{maximal}} R$ (by Zorn's lemma)

$\forall_{(1)\neq} I \trianglelefteq R \ \exists M$ (Maximal Ideal) : $I \subseteq M$

A ring with one maximal ideal is called a local ring and the field $\frac{R}{M}$ is called the residue field of R

⑤ $\Rightarrow$ $(1) \neq M \trianglelefteq R$, $\forall x \in R - M$, x is unit $\rightsquigarrow$

R is a local ring and M is Maximal

⑥ $\Rightarrow$ $M \trianglelefteq^{\text{maximal}} R$ $\forall x \in M$, $1+x$ is unit $\rightsquigarrow R$ is local ring

$N \trianglelefteq R$ is all of nilpotent elements in R, called nilradical

7 $\Rightarrow N = \bigcap_{\substack{I \triangleleft R \\ \text{Prime}}} I$

$\mathcal{J}R$ ~~is~~ Jacobson radical of R: $\mathcal{J}R = \bigcap_{\substack{M \triangleleft R \\ \text{maximal}}} M$

8 $\Rightarrow x \in \mathcal{J}R \iff 1 - xy$ is a unit in R $(\forall y \in R)$

9 $\Rightarrow I \triangleleft R \Rightarrow \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \subseteq P \triangleleft R \\ \text{Prime}}} P$

result: $\underset{\text{Prime}}{P \triangleleft R} \Rightarrow \sqrt{P} = P$

Tensor Product: A: Right R-Modul, B: Left R-Modul

$Z(A,B) = \{\sum r_i (a_i, b_i) \mid a_i \in A, b_i \in B, r_i \in \mathbb{Z}$ for finit $r_i \neq 0\}$

$Y(A,B) = \langle ((a_i + a_j, b) - (a_i, b) - (a_j, b)), ((a, b_i + b_j)$

$- (a, b_i) - (a, b_j)), ((a'r, b') - (a', rb')) \rangle$ $(r \in R)$

$A \otimes_R B = Z(A,B) / Y(A,B)$ $\quad a \otimes b = Y(A,B) + (a,b)$

$x \in A \otimes_R B \rightsquigarrow x = \sum_{i=1}^{n} r_i^{\in \mathbb{Z}} (a_i \otimes b_i)$ $\quad \bar{f}(a \otimes b) = f(a,b)$

10 $\Rightarrow f: \underset{R\text{-Modul}}{A \times B} \xrightarrow{\text{biliner}} \underset{\text{abelian group}}{C} \Rightarrow \exists! \bar{f}: A \otimes_R B \xrightarrow{\text{hom}} C$

11 $\Rightarrow f: A \xrightarrow{\text{hom}} A', g: B \xrightarrow{\text{hom}} B' \Rightarrow \exists f \otimes g: A \otimes_R B \xrightarrow{\mathbb{Z}\text{-hom}} A' \otimes_R B'$

$: (f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$

Subject:
Date:

«مروری بر جبر»

قضیه اساسی گروه‌های آبلی ← هر گروه آبلی متناهی مولد به صورت یکتا یکریخت است با $\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\dots\times\mathbb{Z}_{m_r}\times\underbrace{\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{s\ \text{بار}}$

که در آن $m_1|m_2|\dots|m_{r-1}|m_r$ ؛ s بار ← عدد بتی G ؛ m_i ها عوامل پایا

صورت دوم ← ($p_i^{n_i}$ ها لزوماً متمایز نیستند) $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\times\dots\times\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}\times\underbrace{\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{t\ \text{بار}}$

تعریف پایاهای G ← G آبلی و $|G|=p^n$ ، $G\cong\mathbb{Z}_{p^{e_1}}\times\dots\times\mathbb{Z}_{p^{e_k}}$ که در آن $e_1\ge\dots\ge e_k\ge 1$

در این صورت اعداد $p^{e_1},\dots,p^{e_k}$ را پایاهای G می‌نامند.

← هر دو گروه از مرتبه‌ی p^n یکریخت‌اند $\Longleftrightarrow$ پایاهای آنها برابر باشند.

افراز n ← مجموعه‌ی $\{e_1,\dots,e_k\}$ را افراز n نامیم هرگاه: $n=e_1+\dots+e_k$

قضیه ← تعداد گروه‌های آبلی غیر یکریخت مرتبه p^n برابر است با تعداد افرازهای n.

← تعداد گروه‌های آبلی غیر یکریخت از مرتبه‌ی $n=p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}$ برابر است با $|\underbrace{P(n_1)}_{\text{افراز } n_1}|\times\dots\times|P(n_k)|$

p-گروه ← G را یک p-گروه گوییم هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از p باشد.

← G یک p-گروه آبلی متناهی مولد $\Longleftarrow$ $|G|=p^n$

آبلی آزاد متناهی مولد ← G دارای پایه متناهی $\Longleftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{N},\ G\cong\underbrace{\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{k\ \text{بار}}$

← $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ پایه‌ی G (آبلی) $\Longleftarrow$ $\left|\frac{G}{2G}\right|=2^k$ $(\operatorname{rank} G=k)$

← $G(p)=\{g\in G \mid o(g)=p^n,\ (n\in\mathbb{N})\}\le G$ ، $m\in\mathbb{Z},\ G[m]=\{g\in G\mid mg=0\}\le G$

Subject: $T(G)=\{0\}$ که G فارغ از تاب است

Date

زیرگروه تابی

$T(G)=\{g\in G \mid o(g)<\infty\} \trianglelefteq G$ زیرگروه تابی

$p^m\mathbb{Z}_{p^n}\cong\mathbb{Z}_{p^{n-m}}$ $(m<n)$

$\mathbb{Z}_{p^n}[p]\cong\mathbb{Z}_p$ $(n\geq 1)$

G و G_i ها آبلی و $G\cong\prod_{i=1}^{n}G_i$ در این صورت:

$mG\cong\prod_{i=1}^{n}mG_i$ & $G[m]\cong\prod_{i=1}^{n}G_i[m]$

G و H آبلی و $G\cong H$ $\Leftarrow$ $G(p)\cong H(p)$ & $T(G)\cong T(H)$

G یک p-گروه است $\Longleftrightarrow$ $(\exists n,\ |G|=p^n)$

$\underbrace{\{x\in X \mid gx=x,\ \forall g\in G\}}$

اگر H (p-گروه متناهی G) روی X عمل کند $\Leftarrow$ $|X_0|\overset{p}{\equiv}|X|$

H یک p-زیرگروه متناهی $\Leftarrow$ $[N_G(H):H]\overset{p}{\equiv}[G:H]$

$+\ p\mid[G:H]$ $\Leftarrow$ $N_G(H)\neq H$

عمل گروه

X مجموعه و G گروه ، G بر X عمل می‌کند هرگاه نگاشت $\begin{array}{l} G\times X\longrightarrow X \\ (g,x)\longrightarrow g.x\end{array}$ طوری یافت شود که

1) $\forall x\in X$ ، $\underset{}{\overset{G \text{ همانی}}{1}}.x=x$ 2) $\forall x\in X,\ g,h\in G: g.(h.x)=(gh).x$

X یک G مجموعه: به ازای هر $g\in G$ نگاشت $\begin{array}{l} \varphi_g: X\longrightarrow X \\ x\longmapsto g.x\end{array}$ را خواهیم داشت که درست است

G بر X عمل می‌کند:

$x\sim y \Leftrightarrow \exists g\in G:\ g.x=y$

حال مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی حاصل را با نماد X/G نشان می‌دهیم